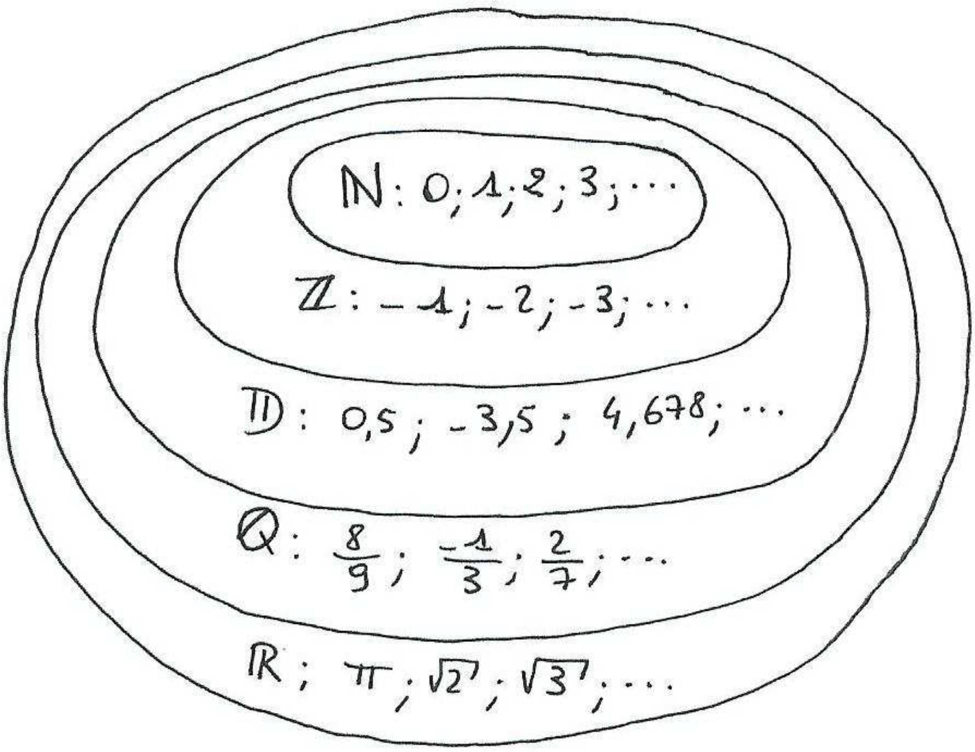
# Chapitre 1 : Expressions algébriques et équations

## I – Ensembles de nombres

- Lorsqu'un nombre $x$ appartient à un ensemble A, on note $x \in$ A.
  Si l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on note A $\subset$ B.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels (positifs) : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs et négatifs) : … ; – 3 ; – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux : c'est l'ensemble des nombres qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule. (Ils peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10). Par exemple : 0,5 ; – 3,5 ; 4,678 ; …
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels : c'est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs. Par exemple : $\frac{8}{9}$ ; $\frac{-1}{3}$ ; $\frac{2}{7}$ ; …
- L'ensemble des nombres irrationnels est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels. Par exemple : $\pi$ ; $\sqrt{2}$ ; $\sqrt{3}$ ; …
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels : c'est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

Propriété : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.




Exercice : Compléter par $\in$ ou $\notin$.

$\frac{7}{12}$ …… $\mathbb{N}$ ; – 13 …… $\mathbb{Z}$ ; $\sqrt{145}$ …… $\mathbb{Q}$ ; 4 – $\sqrt{13}$ …… $\mathbb{R}$ ; – 2,201 …… $\mathbb{D}$ ; $\sqrt{1,69}$ …… $\mathbb{N}$ ;

$\frac{7}{12}$ …… $\mathbb{D}$ ; – 13 …… $\mathbb{Q}$ ; $\sqrt{145}$ …… $\mathbb{D}$ ; 4 – $\sqrt{13}$ …… $\mathbb{Q}$ ; – 2,201 …… $\mathbb{R}$ ; $\sqrt{1,69}$ …… $\mathbb{D}$.

# II – Écrire et transformer une expression

## 1 – Différentes formes d'une expression algébrique

Une expression algébrique peut se présenter sous l'une des deux formes suivantes.

| **Forme développée (somme de termes)** | **Forme factorisée (produit de facteurs)** |
|---|---|
| $x^2 + 3x - 4$ | $(x + 4)(x - 1)$ |
| Pour tout $x \neq \frac{1}{7}$ : $4 + \frac{3}{7x - 1}$ | Pour tout $x \neq \frac{1}{7}$ : $\frac{28x - 1}{7x - 1}$ |

Suivante le problème à résoudre, on peut utiliser l'une ou l'autre de ces formes, la mieux adaptée.

## 2 – Écriture d'une expression sous forme développée

On dispose principalement de deux outils pour développer une expression algébrique :

- **Distribuer**

Exemple : $(2x + 1)(-x + 3) - 2(5x + 7) = -2x^2 + 6x - x + 3 - 10x - 14 = -2x^2 - 5x - 11$.

- **Utiliser les identités remarquables**

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemples :
$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
$(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$
$(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 - 1$

## 3 – Écriture d'une expression sous forme factorisée

On dispose principalement de trois outils pour factoriser une expression algébrique :

- **Repérer un facteur commun**

Exemple :

$$\begin{aligned}(5x - 3)(3x + 1) - 2(5x - 3)(x + 4) &= (5x - 3)[(3x + 1) - 2(x + 4)] \\ &= (5x - 3)(3x + 1 - 2x - 8) \\ &= (5x - 3)(x - 7)\end{aligned}$$

- **Utiliser les identités remarquables**

Exemple : $9x^2 - 49 = (3x)^2 - 7^2 = (3x + 7)(3x - 7)$

- **Utiliser un dénominateur commun pour factoriser une expression rationnelle**

Exemple :

$$\frac{2}{-x+3} - \frac{3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)}{(-x+3)(2x+1)} - \frac{3(-x+3)}{(2x+1)(-x+3)} = \frac{4x+2+3x-9}{(-x+3)(2x+1)} = \frac{7x-7}{(-x+3)(2x+1)}$$

# III – Résolution d'équations

Définitions :

- Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu (si elles existent) qui vérifient l'égalité, c'est-à-dire telles que l'égalité soit vraie.

- Deux équations sont dites équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

## 1 – Équation affine

Définition : Une équation affine d'inconnue $x$ est équivalente à l'équation $ax + b = 0$.

Propriété : Si $a \neq 0$, la solution de l'équation affine $ax + b = 0$ est $-\frac{b}{a}$.
Si $a = 0$, l'équation $ax + b = 0$ a une infinité de solutions si et seulement si $b = 0$.

Exemples :

- Résoudre l'équation $5x - 7 = 3x + 2$.

$5x - 7 = 3x + 2$
$\Leftrightarrow 5x - 7 - (3x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow 5x - 7 - 3x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 9 = 0$

La solution de l'équation $5x - 7 = 3x + 2$ est $\frac{9}{2}$.

On conclut $S = \{ \frac{9}{2} \}$.

- Résoudre l'équation $x^2 - 5x + 3 = (2 - x)^2$.

$x^2 - 5x + 3 = (2 - x)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 4 - 4x + x^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 - (4 - 4x + x^2) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 - 4 + 4x - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow -x - 1 = 0$
La solution de l'équation $x^2 - 5x + 3 = (2 - x)^2$ est $-1$. On conclut $S = \{ -1 \}$.

## 2 – Équation produit

Définition : Toute équation du type $A \times B = 0$, où A et B sont des expressions algébriques, est appelée équation produit.

Propriété : Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple : Résoudre l'équation $(3x + 5)^2 - (3x + 5)(2x + 4) = 0$.
$(3x + 5)^2 - (3x + 5)(2x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 5)(3x + 5) - (3x + 5)(2x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 5)(3x + 5) - (3x + 5)(2x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 5)[3x + 5 - (2x + 4)] = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 5)(3x + 5 - 2x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 5)(x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow 3x + 5 = 0$ ou $x + 1 = 0$

Les solutions de l'équation $(3x + 5)^2 - (3x + 5)(2x + 4) = 0$ sont $-\frac{5}{3}$ et $-1$.

On conclut $S = \{ -\frac{5}{3} ; -1 \}$.

## 3 – Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété : $a$ désigne un nombre relatif.

- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution unique 0.
- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 = 5$.
5 est positif donc l'équation $x^2 = 5$ admet deux solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

## 4 – Équation quotient

Définition : Toute équation du type $\frac{A}{B} = 0$, où A et B sont des expressions algébriques (avec $B \neq 0$), est appelée équation quotient.

Propriétés :

- L'équation $\frac{A}{B} = 0$ est équivalente à A = 0 et B ≠ 0.
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ si, et seulement si, A × D = B × C et B ≠ 0 et D ≠ 0.

<u>Exemple</u> : Résoudre l'équation $\frac{2x+3}{5x-7} = 2$.

$\frac{2x+3}{5x-7} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{5x-7} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{5x-7} - \frac{2(5x-7)}{5x-7} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3-2(5x-7)}{5x-7} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3-10x+14}{5x-7} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-8x+17}{5x-7} = 0$

$\Leftrightarrow -8x + 17 = 0$ et $5x - 7 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{17}{8}$ et $x \neq \frac{7}{5}$

La solution de l'équation $\frac{2x+3}{5x-7} = 2$ est $\frac{17}{8}$.

On conclut S = $\{ \frac{17}{8} \}$.

<u>Remarque</u> :
On peut aussi utiliser avec précaution la technique suivante :

$\frac{2x+3}{5x-7} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{5x-7} = \frac{2}{1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3) \times 1 = 2 \times (5x-7) \\ 5x - 7 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = 10x - 14 \\ 5x - 7 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 17 = 0 \\ 5x - 7 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{17}{8}$ et $x \neq \frac{7}{5}$

La solution de l'équation $\frac{2x+3}{5x-7} = 2$ est $\frac{17}{8}$.

On conclut S = $\{ \frac{17}{8} \}$.