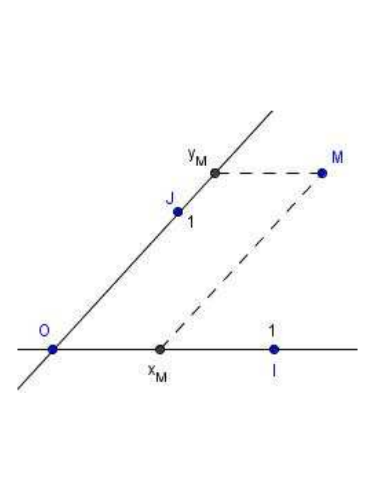
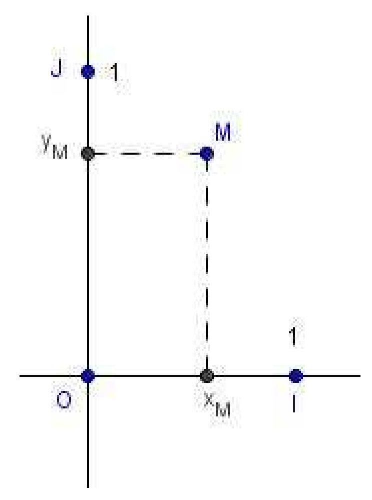
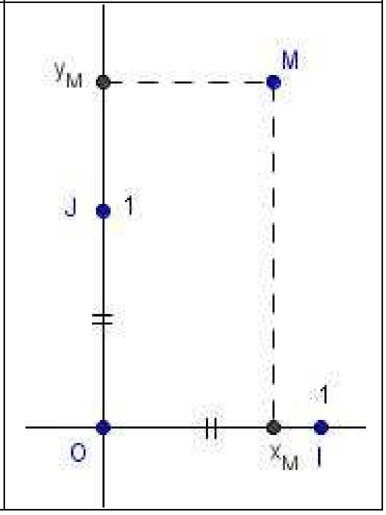
Chapitre 2 : Repérage dans le plan

I – Repère et coordonnés

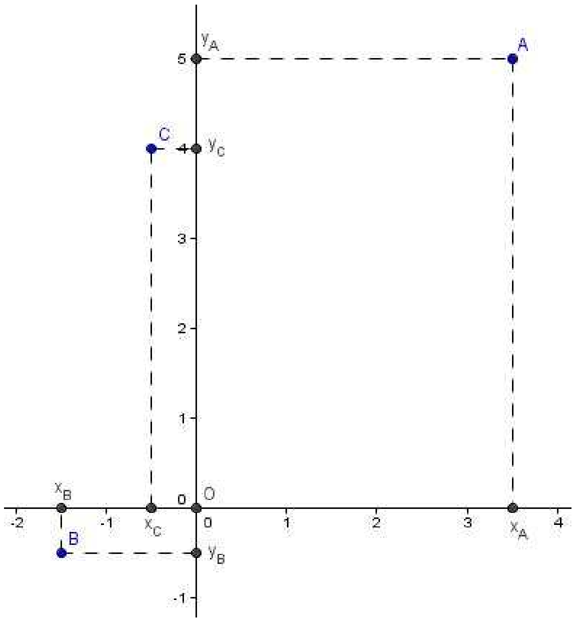
Trois points distincts non alignés O, I et J définissent un repère du plan.
On note souvent (O ; I, J). On note M un point quelconque du plan.
Les généralités suivantes sont valables pour les 3 types de repère :

- O est l'origine du repère ;
- La droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I donne l'unité sur cet axe ;
  La droite (OJ) est l'axe des ordonnées et le point J donne l'unité sur cet axe ;
- En traçant la parallèle à (OJ) passant par M, on obtient sur (OI) l'abscisse x_M du point M ;
  En traçant la parallèle à (OI) passant par M, on obtient sur (OJ) l'ordonnée y_M du point M ;
- Le couple de réels $(x_M\ ;\ y_M)$ est le couple de coordonnées du point M dans le repère (O ; I, J).

Repère quelconque	**Repère orthogonal** (OI) ⊥ (OJ)	**Repère orthonormé** (OI) ⊥ (OJ) et OI = OJ = 1
		

Propriété : Dans un repère, tout point M du plan est repéré par un unique couple $(x_M\ ;\ y_M)$ de réels, appelé couple des coordonnées de M.

Exemple : (O ; I, J) est un repère orthonormé du plan. Lire les coordonnées des points A, B et C.



Le point A a pour coordonnées (3,5 ; 5) dans le repère (O ; I, J).
Le point B a pour coordonnées (– 1,5 ; – 0,5) dans le repère (O ; I, J).
Le point C a pour coordonnées (– 0,5 ; 4) dans le repère (O ; I, J).

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J) les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).

Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées (x_M ; y_M) où $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$.

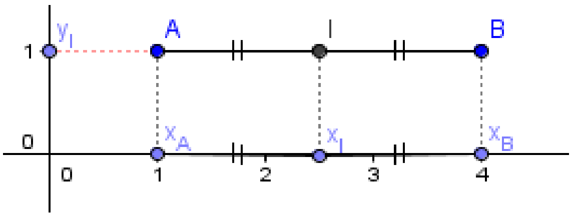
Remarques :

- Pour trouver les coordonnées du milieu d'un segment, il faut faire les moyennes des coordonnées des 2 points.
- Cette propriété reste vraie dans le plan muni d'un repère quelconque.

Preuve : Pour démontrer cette propriété, on utilise un raisonnement par disjonction des cas.

1er cas : $x_A = x_B$ **ou** $y_A = y_B$.

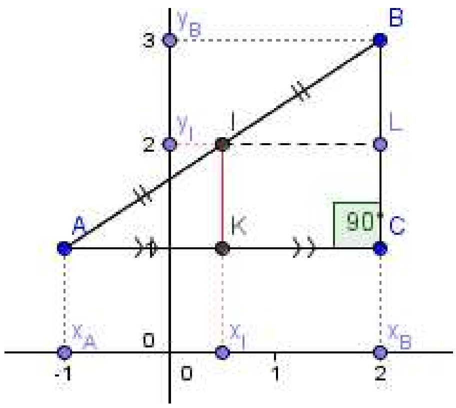
On suppose $y_A = y_B$ et $x_B > x_A$.
I est le milieu de [AB] si et seulement si I ∈ [AB] et IA = IB,
c'est-à-dire $y_I = y_A = y_B$ et $x_I - x_A = x_B - x_I$
soit $y_I = y_A = y_B$ et $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$.



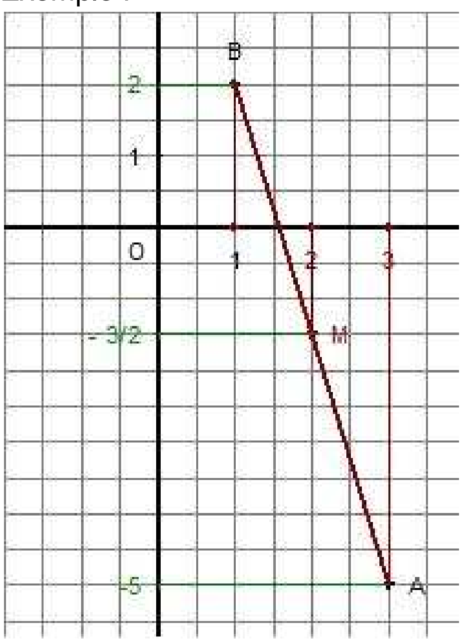
Remarque :
On procéderait de façon analogue lorsque « $y_A = y_B$ et $x_B < x_A$ », « $x_A = x_B$ et $y_B > y_A$ », …

2ème cas : $x_A \neq x_B$ **et** $y_A \neq y_B$.

On note C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.
Le triangle ABC est rectangle en C.
On note K le milieu de [AC] ; d'après le théorème des milieux, la droite (IK) est parallèle à (BC).
Donc $x_I = x_K = \frac{x_A+x_C}{2}$ (d'après le 1er cas).
Soit $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$.
On procéderait de même avec le milieu L de [BC] pour établir que $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$.



Exemple :



Dans un repère orthonormé du plan on considère les points A(3 ; – 5) et B(1 ; 2).
Les coordonnées du milieu M de [AB] sont :
$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$ et $y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-5+2}{2} = \frac{-3}{2}$.
Le point M milieu du segment [AB] a pour coordonnées (2 ; $\frac{-3}{2}$) dans le repère choisi.

III – Distance entre deux points

Propriété : On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J) les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).

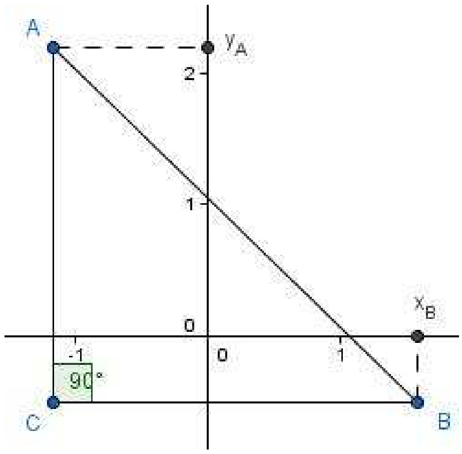
La distance entre les points A et B est : AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, l'unité de longueur étant l'unité commune aux deux axes.

Remarques :

- Dans la formule ci-dessus $(x_B - x_A)^2$ peut être remplacé par $(x_A - x_B)^2$, car les nombres $x_B - x_A$ et $x_A - x_B$ sont opposés et ont par conséquent le même carré. De même pour le terme en y.
- Cette propriété n'est plus valable dans un repère quelconque.

Preuve : On raisonne à l'aide du théorème de Pythagore avec le cas $x_A < x_B$ et $y_A > y_B$.

On place le point C ayant même abscisse que A et même ordonnée que B, c'est-à-dire C(x_A ; y_B).
Les axes du repère étant perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a AB² = AC² + BC².
Or, BC = $x_B - x_A$ et AC = $y_A - y_B$
D'où AB² = $(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2$
Une distance étant positive, on obtient :
AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.



Exemple : Avec les données de l'exemple présent dans le paragraphe I de ce chapitre, calculer les distances AB, AC et BC. On a :

AB=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$=$\sqrt{(-1{,}5 - 3{,}5)^2 + (-0{,}5 - 5)^2}$=$\sqrt{(-5)^2 + (-5{,}5)^2}$=$\sqrt{55{,}25} \approx$ 7,43.

AC=$\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$=$\sqrt{(-0{,}5 - 3{,}5)^2 + (4 - 5)^2}$=$\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}$=$\sqrt{17} \approx$ 4,12.

BC=$\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$=$\sqrt{(-0{,}5 - 1{,}5)^2 + (4 - (-0{,}5))^2}$=$\sqrt{(-2)^2 + (4{,}5)^2}$=$\sqrt{24{,}25} \approx$ 4,92.

Dans (O ; I, J) repère orthonormé du plan, AB a pour distance environ 7,43 unités, AC environ 4,12 unités et BC environ 4,92 unités.