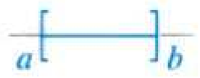
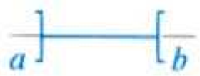
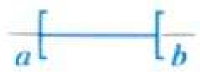
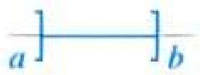
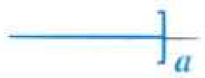
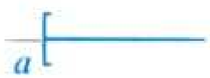
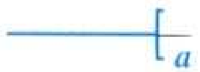
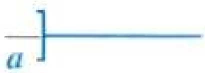
Chapitre 3 : Inéquations

I – Intervalles

- Chaque nombre réel correspond à un unique point sur une droite graduée. Réciproquement, à chaque point d'une droite graduée correspond un unique réel, appelé abscisse de ce point.
- Sur une droite graduée, les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ qui correspondent à un segment, à une demi-droite, ou à la droite toute entière. Ce sont les parties « d'un seul tenant » ou encore « sans trou ».

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

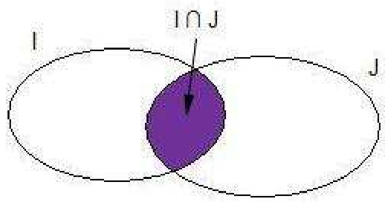
INTERVALLES BORNÉS	**Intervalle**	**Encadrement**	**Représentation sur la droite graduée**
Fermé	$[\, a \,;\, b \,]$	$a \leq x \leq b$	
Ouvert	$]\, a \,;\, b \,[$	$a < x < b$	
Fermé à gauche, ouvert à droite	$[\, a \,;\, b \,[$	$a \leq x < b$	
Ouvert à gauche, fermé à droite	$]\, a \,;\, b \,]$	$a < x \leq b$	

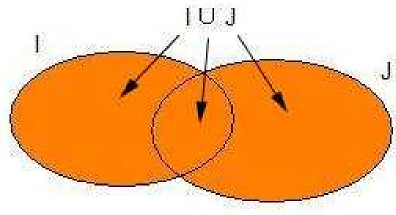
INTERVALLES NON BORNÉS	**Intervalle**	**Encadrement**	**Représentation sur la droite graduée**
Fermés	$]-\infty \,;\, a \,]$	$x \leq a$	
	$[\, a \,;\, +\infty[$	$x \geq a$	
Ouverts	$]-\infty \,;\, a \,[$	$x < a$	
	$]\, a \,;\, +\infty[$	$x > a$	

Remarques :

- L'ensemble des réels se note $\mathbb{R} =]-\infty \,;\, +\infty[$; l'ensemble des réels positifs se note $\mathbb{R}_+ = [\,0 \,;\, +\infty[$; l'ensemble des réels strictement positifs se note $\mathbb{R}_+^* =]\,0 \,;\, +\infty[$.
- $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres. Du côté de $-\infty$ et $+\infty$ le crochet de l'intervalle est toujours ouvert.
- L'ensemble vide ne contient aucun élément et se note $\emptyset$, sans accolades, ni parenthèses.
- Un ensemble contenant un seul réel a est appelé un singleton et se note $\{\, a \,\}$.

Définitions : Soient I et J deux ensembles.
L'intersection de I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I et à J.
La réunion de I et J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des éléments appartenant à I ou à J.





Exemple :
Pour désigner l'ensemble des réels x vérifiant : $x \leq 3$ ou $x > 4$, on écrira : $]-\infty\,;\,3\,] \cup]\,4\,;\,+\infty[$.
Cet ensemble n'est pas un intervalle, car il n'est pas « d'un seul tenant ».

II – Résoudre une inéquation

Définition : Résoudre une inéquation dans un ensemble de réels, c'est trouver tous les éléments de cet ensemble qui vérifient l'inégalité donnée.

Exemple :
- 8 est solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times 8 - 5 = 11 > 0$.
- -1 n'est pas solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times (-1) - 5 = -7 < 0$.

Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - 5 > 0$ est $]\,\frac{5}{2}\,;\,+\infty[$ car $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$.

III – Outils pour la résolution d'inéquations

1 – Rappels

On rappelle dans le tableau ci-dessous la règle des signes pour obtenir le signe d'un produit ou d'un quotient.

Signe de a	+	+	–	–
Signe de b	+	–	+	–
Signe de $a \times b$ ou de $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$)	+	–	–	+

Règle 1 : Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de cette inégalité.

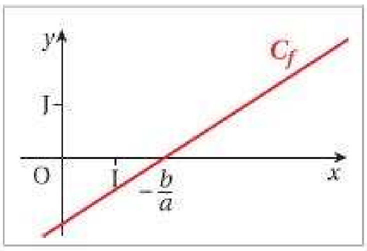
Règle 2 :
- Multiplier ou diviser deux membres d'une inégalité par un même nombre positif ne change pas le sens de cette inégalité.
- Multiplier ou diviser deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif change le sens de cette inégalité.

2 – Déterminer le signe de $ax + b$

Soit a et b deux nombres fixés, a étant différent de 0, et x un nombre réel.
Étudions le signe de $ax + b$ en fonction des valeurs de x.
Considérons la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$.
Sa représentation graphique C_f dans un repère (O ; I, J) est une droite qui coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x vérifiant $f(x) = 0$, soit $x = -\frac{b}{a}$.

- **Si $a > 0$:**

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$:

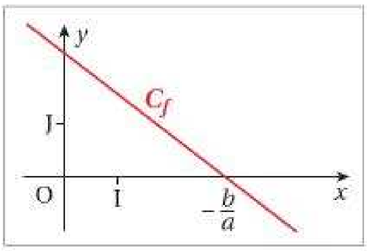


Le signe de $ax + b$ peut être résumé par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

- **Si $a < 0$:**

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$:



Le signe de $ax + b$ peut être résumé par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Exemple : Déterminer le signe de l'expression $-4x + 8$, où x est un nombre réel.

$-4x + 8 = 0 \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow x = 2$. Or $-4 < 0$, donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $-4x+8$		$+$	0	$-$	

Ainsi : $-4x + 8 > 0$ pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 2[$ et $-4x + 8 < 0$ pour tout $x \in]2\ ;\ +\infty[$.

3 – Déterminer le signe d'un produit

Pour étudier le signe d'un produit, on étudie le signe de chaque facteur de ce produit, puis on applique la règle des signes.

Exemple :

On souhaite étudier le signe de $A(x) = (2x - 8)(15 + 3x)$ en fonction des valeurs de x.

Le signe de $A(x)$ dépend du signe de chaque facteur : $2x - 8$ et $15 + 3x$.

$2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

$15 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.

En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $A(x)$:

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$2x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$15+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$A(x) > 0$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -5[\cup]4\ ;\ +\infty[$;

$A(x) > 0$ pour $x \in]-5\ ;\ 4[$;

$A(x) = 0$ pour $x = -5$ ou $x = 4$.

4 – Déterminer le signe d'un quotient

Pour étudier le signe d'un quotient, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur, puis on applique la règle des signes.

Exemple :

On souhaite étudier le signe de $B(x) = \frac{x-4}{-x+6}$ en fonction des valeurs de x.

Le signe de B(x) dépend du signe des expressions x – 4 et – x + 6.
x – 4 ⇔ x =4.
– x + 6 ⇔ x = 6.
Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.
B(x) n’est pas défini pour – x + 6 = 0, c’est-à-dire pour x = 6 ; pour le signifier, on marquera une double barre verticale dans le tableau de signes.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe de B(x) :

x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Ainsi :
B(x) > 0 pour x ∈] 4 ; 6 [;
B(x) > 0 pour x ∈]–∞ ; 4 [∪] 6 ; +∞ [;
B(x) = 0 pour x = 4.