

Correction DM n° 2. 2^{nde}

Exercice 1

1) a) $\frac{19}{11} \approx 1,72727272$ Donc $\frac{19}{11}$ ne semble pas décimal.

b) 72 est la période de l'écriture périodique de $\frac{19}{11}$.

2) $x = 0,131313\dots$

a) $100x = 13,1313\dots$

$$100x = 13 + 0,131313\dots$$

$$100x = 13 + x$$

b) $99x = 13$ Donc x est un nombre rationnel.

$$x = \frac{13}{99}$$

3) $x = 0,173173173\dots$

$$1000x = 173,173173\dots$$

$$1000x = 173 + x \quad \text{Donc} \quad 999x = 173$$

$$x = \frac{173}{999}$$

4) $a = 3,404040\dots$

Poseons $b = 0,404040\dots$

$$100b = 40,4040\dots$$

$$100b = 40 + b \quad \text{donc} \quad b = \frac{40}{99}$$

On a donc $a = 3 + 0,404040\dots$

$$a = 3 + b$$

$$a = 3 + \frac{40}{99} = \frac{297}{99} + \frac{40}{99} = \frac{337}{99}$$

5) Poseons $y = 0,999999\dots$

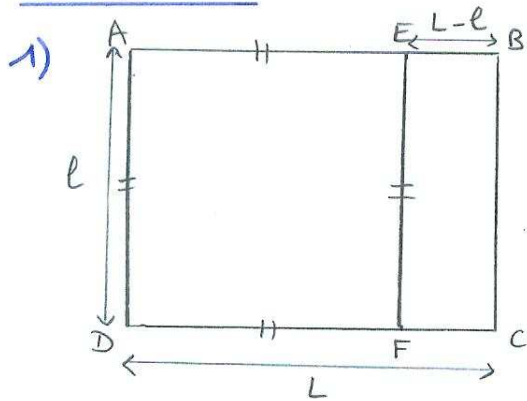
$$10y = 9,999999\dots$$

$$10y = 9 + y \quad \text{donc} \quad 9y = 9$$

$$y = 1$$

On conclut que $0,999999\dots = 1$!!

Exercice 2



a). Dans le rectangle ABCD, le rapport longueur sur largeur est $\frac{L}{l}$.

• Dans le rectangle EBCF, le rapport longueur sur largeur est $\frac{l}{L-l}$.

• D'après l'énoncé, les rapports longueur sur largeur sont égaux.

$$\text{Donc } \frac{L}{l} = \frac{l}{L-l} \text{ c'est-à-dire } \frac{L}{l} = \frac{L-l}{l}.$$

$$\text{Donc } L(L-l) = l^2 \Leftrightarrow L^2 - Ll - l^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{l^2} - \frac{Ll}{l^2} - \frac{l^2}{l^2} = 0 \quad (l \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{L}{l}\right)^2 - \frac{L}{l} - 1 = 0$$

Donc $\varphi = \frac{L}{l}$ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b) $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = x^2 - x - 1$.

$$\text{Donc } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 0$$

$$\text{Soit } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \quad \text{Soit } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

Or φ est un rapport de longueur donc positif.

Conclusion: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Posons $DF = DA = 1$. I est le milieu de [DF] et le cercle de centre I et de rayon IE coupe la droite (DF) en C.

Le triangle IEF est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore, on a:

$$IE^2 = IF^2 + FE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } IE = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{De plus } DC = DI + IC = DI + IE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Conclusion: $\frac{DC}{DA} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Pour construire un rectangle d'on connaissant sa largeur, il suffit donc de construire un carré AEDF de côté la largeur du rectangle. Puis, placer I milieu de [DF] et tracer le cercle de centre I et de rayon IE. Ce cercle coupe (DF) en C.

DC sera la longueur du rectangle d'on et DA étant sa largeur.