Correction DM n° 2 - 2nde

Exercice 1

1) a) $\frac{19}{11} \approx 1,72727272$ Donc $\frac{19}{11}$ ne semble pas décimal.

b) 72 est la période de l'écriture périodique de $\frac{19}{11}$.

2) $x = 0,131313...$

a) $100x = 13,1313...$

$100x = 13 + 0,131313...$

$100x = 13 + x$

b) $99x = 13$ Donc x est un nombre rationnel.

$x = \frac{13}{99}$

3) $x = 0,173\,173\,173...$

$1000x = 173,173\,173...$

$1000x = 173 + x$ Donc $999x = 173$

$x = \frac{173}{999}$

4) $a = 3,404040...$

Posons $b = 0,404040...$

$100b = 40,4040...$

$100b = 40 + b$ donc $b = \frac{40}{99}$

On a donc $a = 3 + 0,404040...$

$a = 3 + b$

$a = 3 + \frac{40}{99} = \frac{297}{99} + \frac{40}{99} = \frac{337}{99}$.

5) Posons $\underline{y = 0,999\,999...}$

$10y = 9,999\,999...$

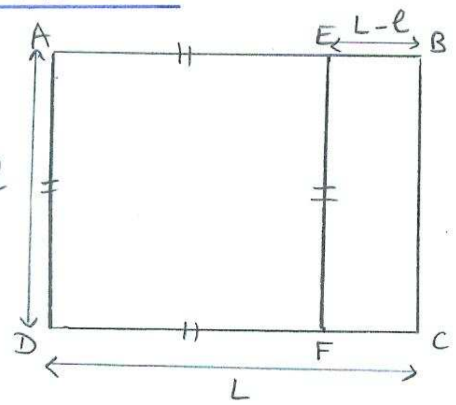
$10y = 9 + y$ donc $9y = 9$

$\underline{y = 1}$

On conclut que $0,999\,999... = 1$!!

Exercice 2

1)



a). Dans le rectangle ABCD, le rapport longueur sur largeur est $\frac{L}{\ell}$.

. Dans le rectangle EBCF, le rapport longueur sur largeur est $\frac{\ell}{L-\ell}$.

. D'après l'énoncé, les rapports longueur sur largeur sont égaux.

Donc $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L-\ell}$ c'est-à-dire $\frac{\ell}{L} = \frac{L-\ell}{\ell}$.

Donc $L(L-\ell) = \ell^2 \Leftrightarrow L^2 - L\ell - \ell^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{\ell^2} - \frac{L\ell}{\ell^2} - \frac{\ell^2}{\ell^2} = 0 \quad (\ell \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 - \frac{L}{\ell} - 1 = 0$$

Donc $\varphi = \frac{L}{\ell}$ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b) $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = x^2 - x - 1$.

Donc $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

Soit $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ Soit $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

Or φ est un rapport de longueur donc positif.

<u>Conclusion</u> : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Posons DF = DA = 1. I est le milieu de [DF] et le cercle de centre I et de rayon IE coupe la droite (DF) en C.

Le triangle IEF est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$IE^2 = IF^2 + FE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

Donc $IE = \frac{\sqrt{5}}{2}$

De plus $DC = DI + IC = DI + IE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<u>Conclusion</u> : $\frac{DC}{DA} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Pour construire un rectangle d'or connaissant sa largeur, il suffit donc de construire un carré AEFD de côté la largeur du rectangle. Puis, placer I milieu de [DF] et tracer le cercle de centre I et de rayon IE. Ce cercle coupera (DF) en C.

DC sera la longueur du rectangle d'or et DA étant sa largeur.