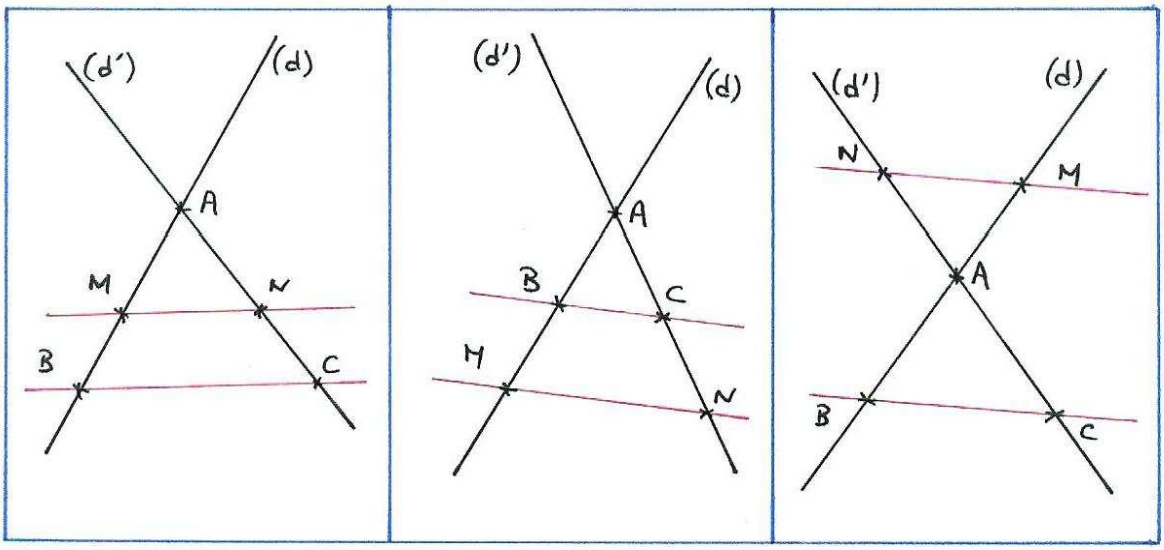
Chapitre 1 : Théorème de Thalès

I – Théorème de Thalès.

1 – Configurations clés.

- Soient (d) et (d’) deux droites sécantes en A.
- Soient B et M deux points de (d), distincts de A.
- Soient C et N deux points de (d’), distincts de A.
- (BC) // (MN).



2 – Énoncé.

Théorème de Thalès :

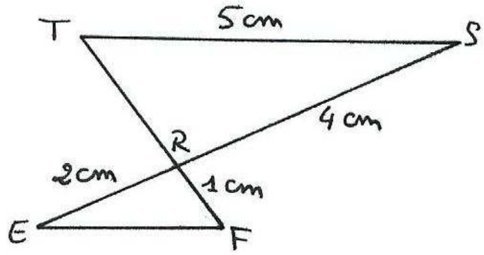
- Soient (d) et (d’) deux droites sécantes en A.
- Soient B et M deux points de (d), distincts de A.
- Soient C et N deux points de (d’), distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (ou $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$).

Remarque : Cette conclusion traduit le fait que les côtés des triangles ABC et AMN sont proportionnels.

3 – Application : calcul de longueurs.

Énoncé : Sur la figure ci-dessous, on donne : R ∈ (SE), R ∈ (TF) et (ST) // (EF).
Calculer EF et RT.



Rédaction :

On sait que les droites (TF) et (SE) sont sécantes en R et que les droites (TS) et (EF) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{RF}{RT} = \frac{RE}{RS} = \frac{FE}{TS}$, c'est-à-dire $\frac{1}{RT} = \frac{2}{4} = \frac{FE}{5}$.

Calcul de EF : $\frac{2}{4} = \frac{FE}{5}$ donc FE = $\frac{2 \times 5}{4}$ = 2,5. Donc EF = 2,5 cm.

Calcul de RT : $\frac{1}{RT} = \frac{2}{4}$ donc RT = $\frac{1 \times 4}{2}$ = 2,5. Donc RT = 2 cm.

II – Reconnaître des droites parallèles.

1 – Réciproque du théorème de Thalès.

Réciproque du théorème de Thalès :

- Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
- Soient B et M deux points de (d), distincts de A.
- Soient C et N deux points de (d'), distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque : Pour pouvoir utiliser cette réciproque, il faut disposer des quatre longueurs qui partent du sommet commun dans une configuration clé.

2 – Application : reconnaître des droites parallèles.

Énoncé : Sur chacune des figures ci-dessous, les droites (EF) et (MN) sont-elles parallèles ?

Figure 1 :

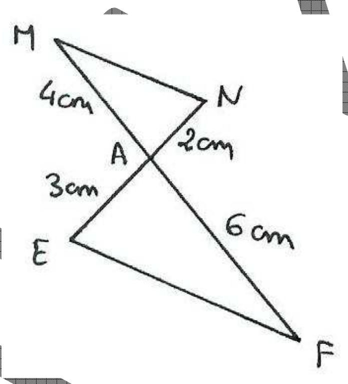
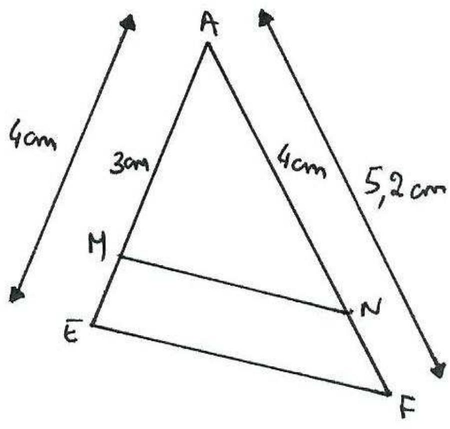


Figure 2 :



Rédaction :

Figure 1 : On sait que les points M, A et F d'une part et les points N, A et E d'autre part sont alignés dans le même ordre.

Calcul séparé : $\frac{AN}{AE} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AM}{AF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On constate que $\frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AF}$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (MN) sont parallèles.

Figure 2 : On sait que les points M, A et F d’une part et les points N, A et E d’autre part sont alignés dans le même ordre.

Calcul séparé : $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AE}} = \frac{3}{4}$ et $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AF}} = \frac{4}{5{,}2}$.

Or, 3 × 5,2 = 15,6 et 4 × 4 = 16. Donc, $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{5{,}2}$.

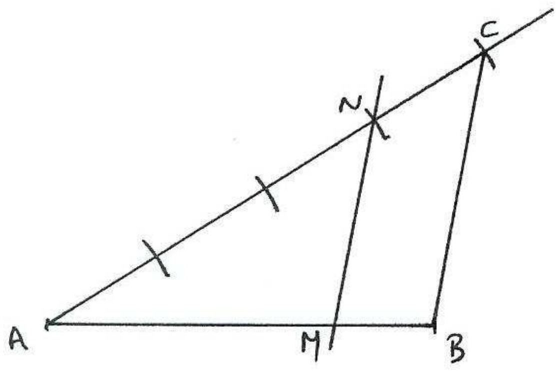
On constate que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AE}} \neq \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AF}}$. Donc, d’après le théorème de Thalès, les droites (EF) et (MN) ne sont pas parallèles.

Remarque : Après le calcul séparé, s’il n’y a pas égalité entre les deux quotients, on conclut que les droites ne sont pas parallèles (d’après le théorème de Thalès).

III – Partage d’un segment.

Exemple 1 :

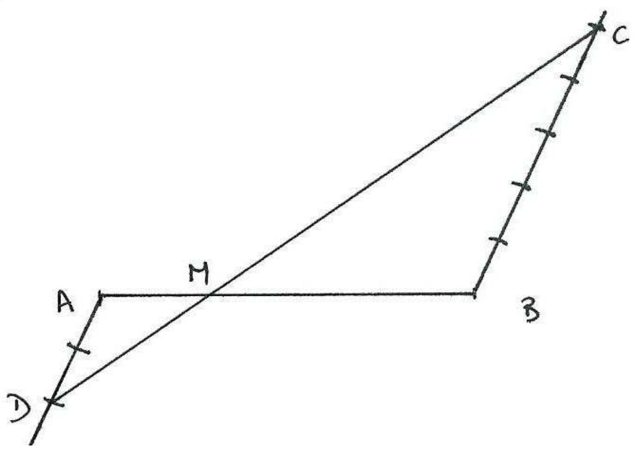
Construire, sans règle graduée, le point M ∈ [AB] tel que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{3}{4}$.



On trace une demi-droite d’origine A qu’on gradue.
On place le point C (à la 4ème graduation) et le point N (à la 3ème graduation).
On trace la droite (BC), puis on construit la droite parallèle à la droite (BC) qui passe par le point N.
Enfin, on note M son point d’intersection avec la droite (AB).

Exemple 2 :

Construire, sans règle graduée, le point M ∈ [AB] tel que $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{2}{5}$.



On trace deux demi-droites parallèles d’origine A et d’origine B de sens contraire qu’on gradue.
On place le point D (à la 2ème graduation) sur la demi-droite d’origine A.
On place le point C (à la 5ème graduation) sur la demi-droite d’origine B.

On trace la droite (DC).
Enfin, on note M son point d'intersection avec la droite (AB).

IV – Agrandissement et réduction.

Définitions :

- On dit qu'un objet est un agrandissement ou une réduction d'un autre objet lorsque leurs longueurs sont proportionnelles.
- Le coefficient de proportionnalité est alors appelé coefficient d'agrandissement ou coefficient de réduction suivant le cas.

Propriétés :

- Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs de deux objets est strictement supérieur à 1, alors c'est un coefficient d'agrandissement.
- Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs de deux objets est strictement compris entre 0 et 1, alors c'est un coefficient de réduction.

Remarque : Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs de deux objets est égal à 1, alors les deux objets ont les mêmes dimensions.

Propriété : Les agrandissements et les réductions conservent les angles, la perpendicularité et le parallélisme.

Exemple : Dans l'exemple 1 du paragraphe III, on a $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{3}{4}$.
$\frac{3}{4}$ est un nombre strictement compris entre 0 et 1, donc le triangle AMN est une réduction du triangle ABC.
Le coefficient de réduction est égal à $\frac{3}{4}$.

Propriété : Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k (k > 0) :

- l'aire d'une figure est multipliée par k^2 ;
- le volume d'un solide est multiplié par k^3 .

Exemple 1 :
Un terrain d'aire A = 900 m^2 est représenté sur un plan à l'échelle $\frac{1}{1\,000}$.
Quelle est l'aire A' du terrain sur le plan ?
Le plan est une réduction de rapport $\frac{1}{1\,000}$,
donc A' = $(\frac{1}{1\,000})^2$ × A = $\frac{1}{1\,000\,000}$ × 900 = 9 × 10^{-4} m^2 = 9 cm^2 .

Exemple 2 :
Un pavé droit a un volume de 125 m^3 . Ses dimensions sont multipliées par 4.
Quel est le volume du pavé droit agrandi ?
On a fait un agrandissement de rapport 4.
Le volume du pavé droit agrandi est égal à : 4^3 × 125 = 64 × 125 = 8 000 m^3 .