Chapitre 10 : Sphères et boules.

I – Définitions.

Définitions : O est un point de l'espace et R désigne un nombre positif.

- La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$.
- La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq R$.

Exemples :

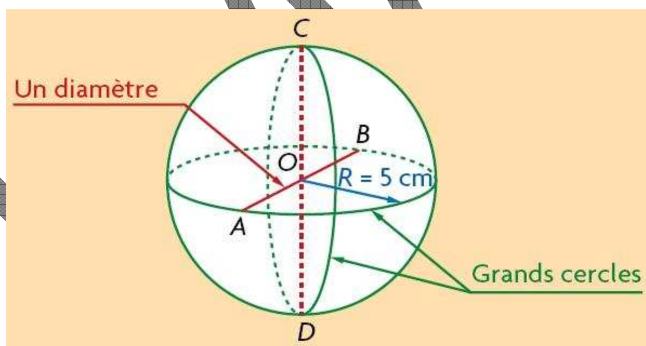
- Une balle de ping-pong et une bulle de savon peuvent être assimilées à des sphères.
- Une boule de billard et la Terre peuvent être assimilées à des boules.

Remarques :

- Un diamètre de la sphère est un segment qui joint deux points de la sphère et qui passe par son centre O.
- Un cercle de centre O et de rayon R s'appelle un grand cercle de la sphère.

Exemple :

Tous les points situés à 5 cm du point O sont sur la sphère de centre O (comme A, B, C et D).
Ils sont situés sur des grands cercles de même centre et même rayon que la sphère.
Les points A et B sont diamétralement opposés : AB = 10 cm.

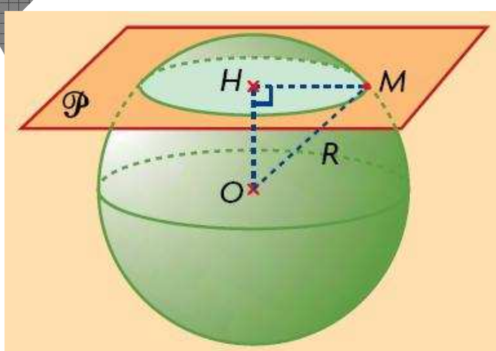


II – Section d'une sphère par un plan.

Propriété : La section d'une sphère par un plan est un cercle.

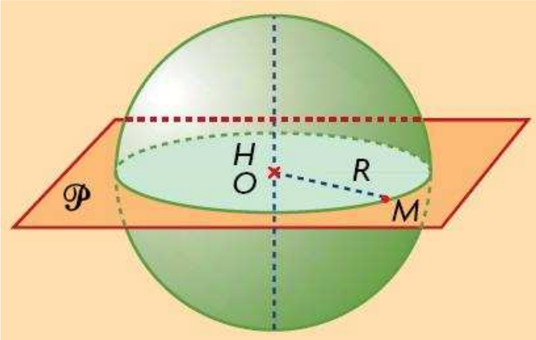
Une sphère de centre O et de rayon R est coupée par un plan ($\mathscr{P}$).
La droite passant par le point O et perpendiculaire au plan ($\mathscr{P}$) coupe ce plan au point H.
On dit que la longueur OH est la distance du point O au plan ($\mathscr{P}$).
La section de la sphère par le plan ($\mathscr{P}$) est un cercle ($\mathscr{C}$) de centre H.

- **Si $0 < OH < R$**



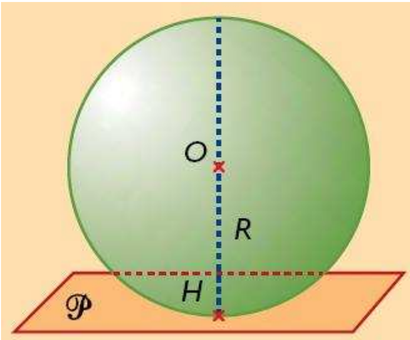
La section est un petit cercle de centre H et de rayon [HM].
Le triangle HOM est rectangle en H.
La sphère est partagée en deux calottes sphériques.

- **Si OH = 0**



Le point H et le point O sont confondus.
La section est un grand cercle de la sphère de même centre et de même rayon que la sphère.
La sphère est partagée en deux <u>hémisphères</u>.

- **Si OH = R**



La section est le point H.
On dit que le plan (𝒫) est <u>tangent</u> en H à la sphère.

<u>Remarque</u> : Si OH > R, le plan (𝒫) ne coupe pas la sphère.

III – Aire et volume.

1 – Aire d'une sphère.

<u>Propriété</u> : L'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère de rayon R est : $\mathcal{A}$ = $\mathbf{4\pi R^2}$.

<u>Exemple</u> : Calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère de rayon 5 cm.

$\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 5^2 = 4\pi \times 25 = 100\pi$ (valeur exacte en cm²).

$\mathcal{A} \approx 314{,}2$ (valeur arrondie au dixième en cm²).

L'aire de la sphère est 100π cm², soit 314,2 cm² arrondie au dixième.

2 – Volume d'une boule.

<u>Propriété</u> : Le volume $\mathcal{V}$ d'une boule de rayon R est : $\mathcal{V} = \mathbf{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

<u>Exemple</u> : Calculer le volume $\mathcal{V}$ d'une boule de rayon 6 cm.

$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \frac{4}{3}\pi \times 216 = \frac{864}{3}\pi = 288\pi$ (valeur exacte en cm^3).

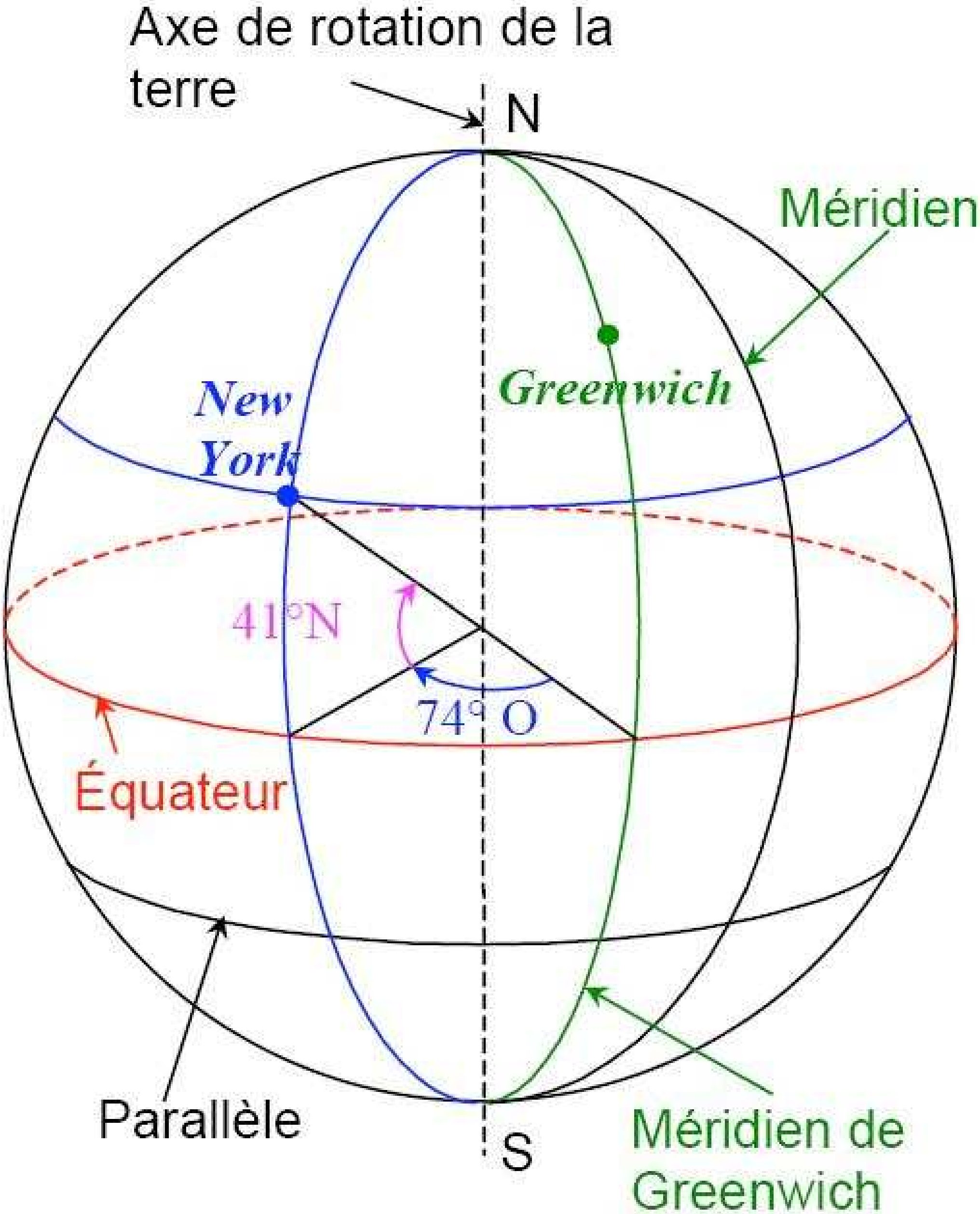
$\mathcal{V} \approx 904{,}8$ (valeur arrondie au dixième en cm^3).

Le volume de la boule est 288π cm^3, soit 904,8 cm^3 arrondi au dixième.

IV – Sphère terrestre : les coordonnées géographiques.

<u>Exemple</u> : Les coordonnées géographiques de New York sont : (74°W ; 41°N).

La première coordonnée est la longitude et la deuxième coordonnée est la latitude.



Les coordonnées géographiques d'Avignon sont : (5°E ; 43°N).