Chapitre 11 : Racines carrées

I – Racine carrée d'un nombre positif.

1 – Définition et propriété.

Définition : a désigne un nombre positif. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est égal à a. On a : $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples :

- $\sqrt{16}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 16. Or, $4^2 = 16$. Donc $\sqrt{16} = 4$.
- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.
- $(\sqrt{10})^3 = \sqrt{10} \times (\sqrt{10})^2 = \sqrt{10} \times 10 = 10\sqrt{10}$.

Remarques :

- Le symbole $\sqrt{}$ s'appelle le radical.
- Si a est un nombre strictement négatif, alors $\sqrt{a}$ n'existe pas.

Propriété : Si a est un nombre positif, alors $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples : $\sqrt{17^2} = 17$; $\sqrt{7{,}9^2} = 7{,}9$.

Les carrés parfaits (à connaître par cœur !!!) :
Un carré parfait est un nombre dont la racine carrée est un nombre entier.

$\sqrt{}$ ↑	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	↓ $(\ )^2$
	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	

2 – Valeur exacte ou valeur approchée.

La touche $\boxed{\sqrt{}}$ d'une calculatrice permet de trouver la valeur exacte ou une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre.

Par exemple, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ (valeur arrondie à 10^{-3} près ou bien au millième).
$\sqrt{2}$ n'est ni un nombre entier, ni un nombre décimal, ni une fraction : c'est un nombre irrationnel.
La seule façon d'écrire sa valeur exacte est $\sqrt{2}$ et une valeur approchée est 1,414.

Exemples :

- ❖ $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; $\sqrt{256} = 16$ sont des valeurs exactes.
- ❖ $\sqrt{8} \approx 2{,}8$; $\sqrt{17} \approx 4{,}1$; $\sqrt{11} \approx 3{,}3$ sont des valeurs arrondies au dixième.
- ❖ $\sqrt{8} \approx 2{,}83$; $\sqrt{17} \approx 4{,}12$; $\sqrt{11} \approx 3{,}32$ sont des valeurs arrondies au centième.

II – Opérations avec des racines carrées.

1 – Multiplication et division.

Propriétés :

- Si a et b sont deux nombres positifs, alors on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

- Si a et b sont deux nombres positifs avec $b \neq 0$, alors on a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples :

- $\sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$
- $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

2 – Addition et soustraction.

ATTENTION :
Si a et b sont des nombres positifs, alors $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Exemples :

- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Donc $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$.
- $\sqrt{225-144} = \sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{225} - \sqrt{144} = 15 - 12 = 3$. Donc $\sqrt{225-144} \neq \sqrt{225} - \sqrt{144}$.

III – Simplification d'écritures.

Définition : Simplifier une racine carrée consiste à écrire cette racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers positifs avec b le plus petit possible.

Méthode pour simplifier une racine carrée :
Pour simplifier une racine carrée, on va faire apparaître sous le radical le produit d'un carrée par un nombre entier.

- 1ère étape : On écrit le nombre sous le radical sous la forme $a^2 \times b$ où a^2 est le plus grand carré possible.
- 2ème étape : On en déduit la simplification de la racine carrée de ce nombre en utilisant les propriétés des racines carrées.

Exemple : Simplifier $\sqrt{50}$, c'est-à-dire l'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers positifs avec b le plus petit possible.
$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

IV – Rappel : l'équation $x^2 = a$.

Propriété : a désigne un nombre relatif.

- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution unique 0.
- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 = 121$.
L'équation $x^2 = 121$ a deux solutions : 11 et – 11.