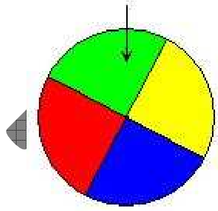
Chapitre 15 : Probabilités.

On réalise les trois expériences suivantes.

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa face supérieure.	On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure.	On fait tourner une roue de loterie équilibrée, on attend qu'elle se stabilise et on regarde la couleur désignée par la flèche.
		

I – Vocabulaire.

Définition : Chacun des résultats possibles d'une expérience est une **issue** (ou une **éventualité**) de l'expérience.

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Cette expérience admet 2 issues : pile et face.	Cette expérience admet 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.	Cette expérience admet 4 issues : vert, rouge, bleu et jaune.

Définition :
Un **événement** est une condition qui peut être, ou ne peut pas être, réalisée lors d'une expérience.
Un **événement** peut être réalisé par une ou plusieurs issues de cette expérience.
Un événement réalisé par une seule issue est un **événement élémentaire**.

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
« *on obtient pile* » est un événement élémentaire.	• « *on obtient un nombre pair* » est un événement réalisé par les issues 2, 4 et 6. • « *on obtient 4* » est un événement élémentaire.	• « *la flèche désigne une couleur primaire* » est un événement réalisé par trois issues : rouge, bleu et jaune. • « *la flèche désigne le vert* » est un événement élémentaire.

Définition : Une expérience est dite aléatoire lorsque chaque issue ne dépend pas des issues des expériences précédentes.

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Pour chacune des expériences ci-dessus, chaque issue ne dépend pas des issues précédentes. Donc, ces expériences sont des expériences aléatoires.		

Remarques :
- Une expérience aléatoire est uniquement due au **hasard**.
- Une expérience aléatoire peut être réalisée autant de fois que l'on veut, dans les mêmes conditions.

II – Notion de probabilité.

1 – Définition.

Définition : Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Si on lançait la pièce un très grand nombre de fois, on obtiendrait pile environ une fois sur deux.	Si on lançait le dé un très grand nombre de fois, on obtiendrait 4 environ une fois sur six.	Si on faisait tourner la roue de loterie un très grand nombre de fois, on obtiendrait vert environ une fois sur quatre.

Notation : Soit A un événement, on note p(A) la probabilité que l'événement A se réalise.

2 – Équiprobabilité.

Définition : Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.
Dans une situation d'équiprobabilité, tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On a autant de chance d'obtenir pile que face ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a autant de chance d'obtenir 1, que 2, que 3, que 4, que 5, que 6 ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a autant de chance d'obtenir vert, que rouge, que jaune, que bleu ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Propriété : Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale au quotient du nombre de cas favorables à l'événement A par le nombre de cas possibles.

On a : **p(A) =** $\dfrac{\textit{nombre de cas favorables à l'événement A}}{\textit{nombre de cas possibles}}$

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On considère l'événement élémentaire : F : « *on obtient face* ». On a p(F) = $\frac{1}{2}$.	On considère l'événement : I : « *on obtient un nombre impair* ». On a p(I) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.	On considère l'événement élémentaire : V : « *on obtient le vert* ». On a p(V) = $\frac{1}{6}$.

3 – Propriétés.

Propriétés :
- Une probabilité est un **nombre compris entre 0 et 1**.
- Un événement dont la probabilité est nulle est un **événement impossible**.
- Un événement dont la probabilité est égale à 1 est un **événement certain**.
- **La somme des probabilités des issues** d'une expérience aléatoire **est égale à 1**.

III – Probabilité de plusieurs événements.

1 – Intersection d'événements.

Définition : Si A et B sont deux événements, l'événement (A et B) est l'événement qui se produit lorsque les événements A et B ont lieu tous les deux simultanément.
On note cet événement $A \cap B$ (on lit « A inter B »).

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On appelle : P l'événement « *on obtient pile* », F l'événement « *on obtient face* ». Ici, l'événement (P et F) ne peut pas se produire, c'est l'événement impossible. On a $p(P \cap F) = 0$.	On appelle : P l'événement « *on obtient un nombre pair* », S l'événement « *on obtient un nombre supérieur à 3* ». L'événement (P et S) correspond au fait d'obtenir un nombre pair supérieur à 3. On a $p(P \cap S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.	On appelle : P l'événement « *on obtient une couleur primaire* », B l'événement « *on obtient le bleu* ». L'événement (P et B) correspond au fait d'obtenir la couleur bleue. On a $p(P \cap B) = \frac{1}{4}$.

2 – Réunion d'événements.

Définition : Si A et B sont deux événements, l'événement (A ou B) est l'événement qui se produit lorsque l'un des deux événements, ou les deux, se produit.
On note cet événement $A \cup B$ (on lit « A union B »).

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On appelle : P l'événement « *on obtient pile* », F l'événement « *on obtient face* ». L'événement (P ou F) est donc l'événement certain. On a $p(P \cup F) = 1$.	On appelle : P l'événement « *on obtient un nombre pair* », S l'événement « *on obtient un nombre supérieur ou égal à 4* ». L'événement (P ou S) correspond aux tirages 2 ; 4 ; 5 ; 6. On a $p(P \cup S) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.	On appelle : V l'événement « *on obtient le vert* », B l'événement « *on obtient le bleu* ». L'événement (V ou B) correspond au fait d'obtenir la couleur verte ou la couleur bleue. On a $p(V \cup B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3 – Événements incompatibles.

Définition : Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Propriété : Lorsque deux événements A et B sont incompatibles, la probabilité pour que l'un ou l'autre se produise est égale à la somme de leurs probabilités : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On appelle : P l'événement « *on obtient pile* », F l'événement « *on obtient face* ». Les événements P et F sont incompatibles. On a : $p(P \cup F) = p(P) + p(F) = 1$.	On appelle : I l'événement « *on obtient un nombre inférieur ou égal à 2* », S l'événement « *on obtient un nombre supérieur ou égal à 5* ». Les événements I et S sont incompatibles. On a : $p(I \cup S) = p(I) + p(S) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.	On appelle : V l'événement « *on obtient le vert* », B l'événement « *on obtient le bleu* ». Les événements V et B sont incompatibles. On a : $p(V \cup B) = p(V) + p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

4 – Événement contraire.

Définition : L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note $\overline{A}$ (on lit « A barre »).

Propriété : La somme des probabilités d'un événement A et de son contraire est 1 :
$p(A) + p(\overline{A}) = 1$.

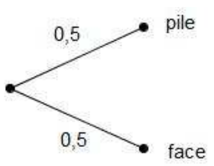
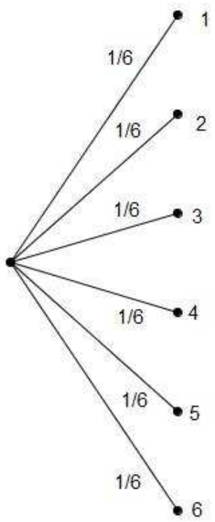
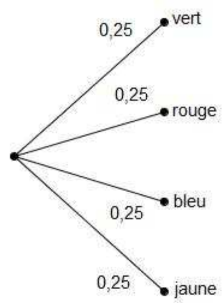
Exemples :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On appelle A l'événement « *on obtient pile* ». Donc $\overline{A}$ est l'événement « *on obtient face* ».	On appelle A l'événement « *on obtient un nombre pair* ». Donc $\overline{A}$ est l'événement « *on obtient un nombre impair* ».	On appelle A l'événement « *on obtient une couleur primaire* ». Donc $\overline{A}$ est l'événement « *on obtient la couleur verte* ».

IV – Arbre de probabilités.

Définition : L'arbre de probabilités d'une expérience indique chacune de ses issues. On peut pondérer l'arbre des probabilités en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

Exemples :

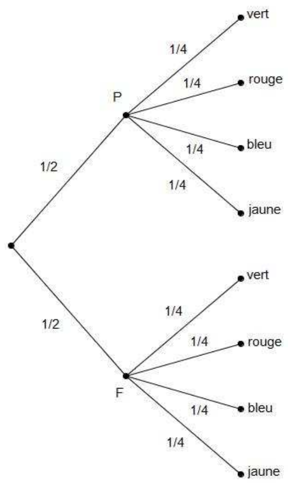
La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
		

V – Expériences aléatoires à deux épreuves.

Vocabulaire : Sur l'arbre de probabilités d'une expérience aléatoire à deux épreuves, une succession de deux branches est appelée un chemin.

Propriété : Sur un arbre de probabilités, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Exemple : On joue d'abord à pile ou face avec la pièce de monnaie ; ensuite, on fait tourner la roue de loterie. On a l'arbre de probabilités suivant :



La probabilité de l'issue : « la pièce a donné pile et la roue s'est arrêtée sur la couleur verte » est égale au produit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ c'est-à-dire $\frac{1}{8}$. On note $p(P \cap V) = \frac{1}{8}$.