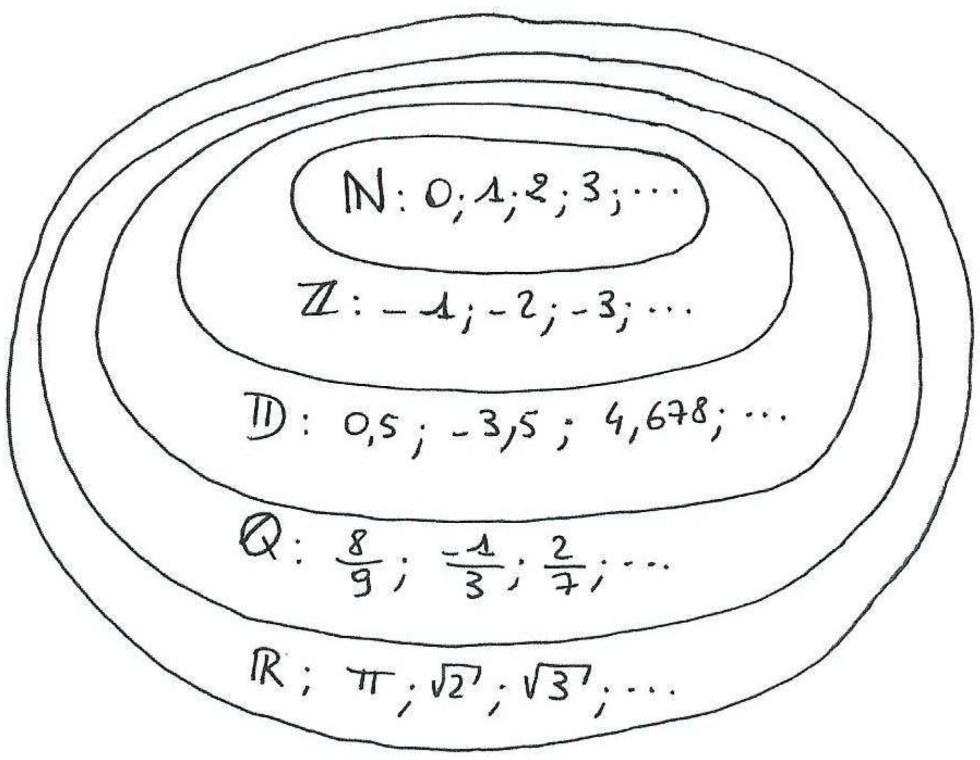
# Chapitre 2 : Arithmétique

## I – Les ensembles de nombres.

- L'ensemble des nombres entiers naturels (positifs) : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … se note $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) : … ; – 3 ; – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … se note $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$ : c'est l'ensemble des nombres qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule. (Ils peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10). Par exemple : 0,5 ; – 3,5 ; 4, 678 ; …
- L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ : c'est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs. Par exemple : $\frac{8}{9}$ ; $\frac{-1}{3}$ ; $\frac{2}{7}$ ; …
- L'ensemble des nombres irrationnels : c'est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels. Par exemple : $\pi$ ; $\sqrt{2}$ ; $\sqrt{3}$ ; …
- Les rationnels et les irrationnels forment l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.




<u>Application</u> :
Combien y-a-t'il de naturels, de 1 à 4 ? 4.
Combien y-a-t'il de relatifs de – 1 à 4 ? 6.
Combien y-a-t'il de rationnels, de 1 à 4 ? Une infinité.
Combien y-a-t'il de réels, de 1 à 4 ? Une infinité.

<u>Exercice</u> : Compléter par $\in$ ou $\notin$.

$\frac{7}{12}$ …… $\mathbb{N}$ ; – 13 …… $\mathbb{Z}$ ; $\sqrt{145}$ …… $\mathbb{Q}$ ; 4 – $\sqrt{13}$ …… $\mathbb{R}$ ; – 2,201 …… $\mathbb{D}$ ; $\sqrt{1{,}69}$ …… $\mathbb{N}$ ;

$\frac{7}{12}$ …… $\mathbb{D}$ ; – 13 …… $\mathbb{Q}$ ; $\sqrt{145}$ …… $\mathbb{D}$ ; 4 – $\sqrt{13}$ …… $\mathbb{Q}$ ; – 2,201 …… $\mathbb{R}$ ; $\sqrt{1{,}69}$ …… $\mathbb{D}$.

## II – Divisibilité.

### 1 – Division euclidienne.

Définition : $a$ et $b$ désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.
Effectuer la division euclidienne de $a$ par $b$, c'est déterminer deux nombres entiers positifs $q$ et $r$ tels que : $a = b \times q + r$, avec $r < b$.

Vocabulaire : $a$ est le dividende (le nombre qui est divisé), $b$ est le diviseur (le nombre qui divise), $q$ est le quotient entier et $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 155 par 4.

| | |
|---|---|
| 155 | 4 |
| – 12 | 38 |
| 35<br>– 32 | |
| 3 | |

On a : 155 = 4 × 38 + 3 et 3 < 4.
Dans la division euclidienne de 155 par 4, le quotient entier est 38 et le reste est 3.

### 2 – Diviseurs d'un nombre entier.

Définition : $a$ et $b$ désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.
On dit que $b$ est un diviseur de $a$ lorsqu'il existe un nombre entier positif n tel que : $a = b \times n$.
On dit aussi que « $b$ divise $a$ » ou que « $a$ est divisible par $b$ » ou que « $a$ est un multiple de $b$ ».

Exemple : 60 = 12 × 5. Donc, 12 est un diviseur de 60.
Les diviseurs de 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 et 60.

Propriété : Un nombre entier strictement supérieur à 1 admet au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

Définition : On dit qu'un nombre entier positif est un nombre premier s'il admet exactement deux diviseurs différents : 1 et lui-même.

Exemples :
- 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 sont des nombres premiers.
- 9 admet trois diviseurs : 1 ; 3 et 9. Donc, 9 n'est pas un nombre premier.

Remarques :
- 0 n'est pas un nombre premier car 0 admet une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas un nombre premier car 1 n'admet qu'un seul diviseur.
- 2 est le seul nombre pair premier.

### 3 – Diviseurs communs à deux nombres entiers.

Définition : $a$ et $b$ désignent deux nombres entiers strictement positifs.
Un diviseur commun à $a$ et $b$ est un diviseur à la fois de $a$ et de $b$.

Exemple : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

Définition : $a$ et $b$ désignent deux nombres entiers strictement positifs.

GAVAZZI.MATHS

Le plus grand des diviseurs commun à $a$ et $b$ s'appelle le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) des nombres $a$ et $b$ et se note PGCD($a$ ; $b$).

Exemple : Cherchons PGCD(72 ; 48).

- Les diviseurs de 72 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 et 72.
- Les diviseurs de 48 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 et 48.
- Les diviseurs communs à 72 et 48 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 et 24.

On a donc PGCD(72 ; 48) = 24.

Propriétés : $a$ et $b$ désignent deux nombres entiers strictement positifs.

- PGCD($a$ ; $a$) = $a$.
- PGCD($b$ ; $a$) = PGCD($a$ ; $b$).
- Si $b$ est un diviseur de $a$, alors PGCD($a$ ; b) = $b$.
- Les diviseurs communs à $a$ et $b$ sont les diviseurs de leur PGCD.

Exemple : Dans l'exemple précédent, les diviseurs communs à 72 et 48 sont bien les diviseurs du PGCD qui est 24.

## III – Algorithmes.

Il y a deux procédés de calculs pour déterminer le PGCD.

### 1 – Algorithme des différences successives.

Propriété : $a$ et $b$ désignent deux nombres entiers strictement positifs avec $a > b$.
PGCD($a$ ; $b$) = PGCD($b$ ; $a - b$).

Méthode : Pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents non nuls avec l'algorithme des différences successives, on suit les étapes suivantes :

Étape 1 : on soustrait le plus petit nombre du plus grand nombre.

Étape 2 : on compare le résultat de cette soustraction au plus petit des deux nombres :

- s'ils sont égaux, alors le PGCD est égal au plus petit des nombres ;
- sinon on recommence l'étape 1 avec le résultat de la soustraction et le plus petit nombre.

Exemple : Calculer le PGCD de 182 et 117.

182 – 117 = 65, d'où PGCD(182 ; 117) = PGCD(117 ; 65) ;

117 – 65 = 52, d'où PGCD(117 ; 65) = PGCD(65 ; 52) ;

65 – 52 = 13, d'où PGCD(65 ; 52) = PGCD(52 ; 13) ;

52 – 13 = 39, d'où PGCD(52 ; 13) = PGCD(13 ; 39) = PGCD(39 ; 13) ;

39 – 13 = 26, d'où PGCD(39 ; 13) = PGCD(13 ; 26) = PGCD(26 ; 13) ;

26 – 13 = 13, d'où PGCD(26 ; 13) = PGCD(13 ; 13).

Or, PGCD(13 ; 13) = 13. Donc, PGCD(182 ; 117) = 13.

### 2 – Algorithme d'Euclide (Algorithme des divisions successives).

Propriété : $a$ et $b$ désignent deux nombres entiers strictement positifs avec $a > b$.
PGCD($a$ ; $b$) = PGCD($b$ ; $r$) où $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.

Méthode : Pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents non nuls avec l'algorithme d'Euclide, on suit les étapes suivantes :

Étape 1 : on effectue la division euclidienne du plus grand de ces nombres par le plus petit.

GAVAZI.MATHS

Étape 2 : on examine le reste de cette division :

- si ce reste est égal à zéro, alors le PGCD est le diviseur de cette division euclidienne ;
- si ce reste n'est pas égal à zéro, on recommence l'étape 1 avec le diviseur et le reste de cette division.

Exemple : Calculer le PGCD de 182 et 117.

$182 = 117 \times 1 + 65$, d'où PGCD(182 ; 117) = PGCD(117 ; 65) ;

$117 = 65 \times 1 + 52$, d'où PGCD(117 ; 65) = PGCD(65 ; 52) ;

$65 = 52 \times 1 + 13$, d'où PGCD(65 ; 52) = PGCD(52 ; 13) ;

$52 = 13 \times 4 + 0$, d'où 13 est un diviseur de 52. D'où, PGCD(52 ; 13) = 13.

Donc, PGCD(182 ; 117) = 13.

Remarques :

- Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul (13 dans l'exemple).
- L'algorithme d'Euclide est plus rapide que celui des différences successives et donc plus efficace.

Exercice : Calculer le PGCD de 1 078 et 322 avec l'algorithme d'Euclide.

## IV – Fractions irréductibles.

### 1 – Nombres premiers entre eux.

Définition : On dit que deux nombres entiers non nuls sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1.

Exemples :

- PGCD(182 ; 117) = 13. Donc, 182 et 117 ne sont pas premiers entre eux.
- PGCD(13 ; 15) = 1. Donc, 13 et 15 sont premiers entre eux.

Remarque : Le seul diviseur commun à deux nombres premiers entre eux est 1.

### 2 – Fractions irréductibles.

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

Remarque : Une fraction irréductible est une fraction simplifiée le plus possible.

Propriété : En simplifiant une fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, on obtient une fraction irréductible.

Remarque : Cette propriété permet de rendre irréductible une fraction (c'est-à-dire d'obtenir une fraction égale et irréductible) en une seule étape.

Exemples :

- $\frac{13}{15}$ est une fraction irréductible car 13 et 15 sont premiers entre eux.
- Simplifier la fraction $\frac{117}{182}$ pour la rendre irréductible :

  PGCD(182 ; 117) = 13. Donc $\frac{117}{182} = \frac{117 \div 13}{182 \div 13} = \frac{9}{14}$ .

Exercice : Simplifier la fraction $\frac{1\,078}{322}$ pour la rendre irréductible.

GAMAZI.MATHS