Chapitre 3 : Calcul numérique

I – Écritures fractionnaires.

1 – Égalité des produits en croix.

Propriété : Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$.
- Si $a \times d = b \times c$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2 – Addition et soustraction.

a) Les dénominateurs sont les mêmes.

Propriété : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur :

- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs,
- on garde le dénominateur commun.

Quels que soient les nombres relatifs a, b et c avec $c \neq 0$, on a : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Exemples :

❖ $\frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1-4}{5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$.

❖ $\frac{8}{7} - \frac{-2}{7} = \frac{8}{7} + \frac{2}{7} = \frac{8+2}{7} = \frac{10}{7}$.

b) Les dénominateurs sont différents.

Propriété : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on doit d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemples :

❖ $\frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{10}{6} = \frac{13}{6}$.

❖ $\frac{-5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{-5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{-10}{12} + \frac{9}{12} = -\frac{1}{12}$.

3 – Multiplication.

Propriété : Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire :

- on multiplie les numérateurs entre eux,
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ et $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$.

Exemples :

❖ $\frac{5}{3} \times \frac{-2}{7} = \frac{5 \times (-2)}{3 \times 7} = \frac{-10}{21} = -\frac{10}{21}$.

❖ $\frac{3}{-4} \times \frac{-3}{2} = \frac{3 \times (-3)}{-4 \times 2} = \frac{-9}{-8} = \frac{9}{8}$.

❖ $5 \times \frac{-3}{13} = \frac{5 \times (-3)}{13} = \frac{-15}{13} = -\frac{15}{13}$.

⚠ Il vaut mieux déterminer le signe du produit et simplifier avant de multiplier.

❖ $\frac{15}{-49} \times \frac{-7}{-10} = -\frac{15 \times 7}{49 \times 10} = -\frac{3 \times 5 \times 7}{7 \times 7 \times 2 \times 5} = -\frac{3}{7 \times 2} = -\frac{3}{14}$.

4 – Division.

Propriété : Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

Quels que soient les nombres relatifs a et b avec $b \neq 0$, on a : $a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Cas particulier :

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemples :

❖ $\frac{-5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{-5}{3} \times \frac{4}{7} = -\frac{5 \times 4}{3 \times 7} = -\frac{20}{21}$.

❖ $\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{10}$.

II – Puissances d'un nombre relatif.

1 – Exposant entier positif.

Définition : a désigne un nombre relatif et n un entier positif.

- Pour $n \geq 2$, $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs)
- $a^1 = a$
- Par convention, $a^0 = 1$ avec $a \neq 0$

a^n est une puissance du nombre a et se lit « a exposant n » ou « a puissance n ».

Exemples : $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$; $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 147$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

⚠ ATTENTION AU RÔLE DES PARENTHÈSES :

Pour prendre une puissance d'un nombre négatif, il faut mettre ce nombre entre parenthèses.

Exemples : $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$; $(-6)^2 = (-6) \times (-6) = 36$

Il ne faut pas confondre $(-4)^2$ et -4^2 :

$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$ et $-4^2 = -(4 \times 4) = -16$; donc $(-4)^2 \neq -4^2$

À savoir : Il est utile de connaître les carrés des premiers nombres entiers.

$1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$;

$10^2 = 100$; $11^2 = 121$; $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$.

2 – Exposant entier négatif.

Définition : a désigne un nombre relatif non nul et n un entier positif non nul.

a^{-n} désigne l'inverse de a^n, c'est-à-dire $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$; $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2)} = -\frac{1}{8}$

Cas particulier : Pour $a \neq 0$, a^{-1} est l'inverse de a. Donc $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

L'inverse de a peut donc se noter $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}.

Exemple : 3^{-1} est l'inverse de 3, donc $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

3 – Cas particulier : les puissances de 10.

Propriétés : n désigne un nombre entier positif.
$10^n = 10 \times \ldots \times 10$ (n facteurs) = 100…00 (n zéros)
et $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ = 0,0…01 (n zéros, n chiffres après la virgule)

Exemples :

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$; $10^7 = 10\,000\,000$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $10^{-5} = 0{,}000\,01$

Propriétés : n désigne un nombre entier strictement positif.
Pour multiplier un nombre en écriture décimale :

- par 10^n, on décale la virgule de n rangs vers la droite,
- par 10^{-n}, on décale la virgule de n rangs vers la gauche,

en complétant éventuellement avec des zéros.

Exemples : $25{,}1 \times 10^5 = 2\,510\,000$ et $25{,}1 \times 10^{-5} = 0{,}000\,251$

4 – Règles de calcul.

Propriétés : a et b désignent deux nombres relatifs non nuls et n et p deux nombres entiers relatifs.

$$\left.\begin{array}{l} a^n \times a^p = a^{n+p} \\ \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \\ (a^n)^p = a^{n \times p} \end{array}\right\} \text{même nombre, exposants différents}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a \times b)^n = a^n \times b^n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \end{array}\right\} \text{nombres différents, même exposant}$$

Exemples :

- $a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$
- $\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^3} = a^{-3}$
- $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$
- $(a \times b)^2 = a \times b \times a \times b = a^2 \times b^2$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

5 – Écriture scientifique d'un nombre décimal.

Définition : L'écriture scientifique (ou notation scientifique) d'un nombre décimal est l'unique forme $a \times 10^n$ dans laquelle le nombre a possède un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemples :
L'écriture scientifique de 2 540 000 est $2{,}54 \times 10^6$.

L'écriture scientifique de 0,001 38 est 1,38 × 10^{-3}.

Exercice : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

437,65 = 0,006 87 =

III – Grandeurs composées.

1 – Grandeur quotient.

Définition : Lorsqu'on effectue le quotient de deux grandeurs, on obtient une grandeur quotient.

Exemple :

La vitesse v est donnée par la formule : $v = \frac{d}{t}$.

La vitesse est le quotient de deux grandeurs : une longueur par une durée.
La vitesse est donc une grandeur quotient.
Si la distance s'exprime en kilomètres (km) et la durée en heures (h), alors la vitesse s'exprime en kilomètres par heure ($\mathrm{km/h}$ ou $\mathrm{km.h^{-1}}$).

2 – Grandeur produit.

Définition : Lorsqu'on effectue le produit de deux grandeurs, on obtient une grandeur produit.

Exemple 1 :
L'aire A d'un rectangle est donnée par la formule : A = L × l.
L'aire est le produit de deux grandeurs : deux longueurs.
L'aire est donc une grandeur produit.
Si la longueur et la largeur s'expriment en mètres (m), alors l'aire s'exprime en mètres carrés ($\mathrm{m^2}$).

Exemple 2 :
L'énergie transformée par un appareil électrique est le produit de sa puissance par la durée d'utilisation.
L'énergie est une grandeur produit.
Si la puissance s'exprime en kilowatts (kW) et la durée en heures (h), alors l'énergie s'exprime en kilowatts-heures (kWh).

3 – Changements d'unités.

Exemple 1 : Convertir 45 km/h en m/s.
On sait que 1 km = 1 000 m et que 1 h = 3 600 s.

45 km/h = $\frac{45\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}}$ = $\frac{45\ 000\ \mathrm{m}}{3\ 600\ \mathrm{s}}$ = 12,5 m/s.

Exemple 2 : Convertir 90 W.min en kW.h.
On sait que 1 W = 0,001 kW et que 1 min = $\frac{1}{60}$ h.

90 W.min = 90 W × 1 min = 90 × 0,001 kW × $\frac{1}{60}$ h = 0,0015 kW.h.