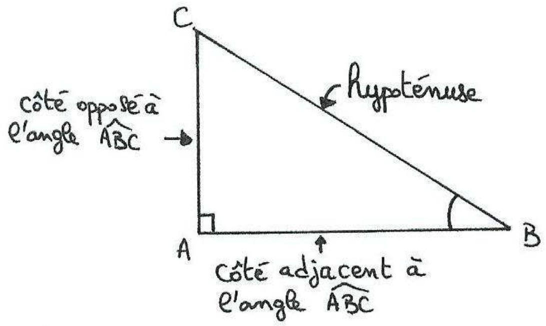
Chapitre 4 : Trigonométrie

I – Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu.

1 – Définitions.

Soit ABC un triangle rectangle en A.



a) Cosinus d'un angle aigu.

Définition : Dans le triangle ABC rectangle en A, le cosinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$, noté $\cos\widehat{ABC}$, est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ par la longueur de l'hypoténuse, c'est-à-dire :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}}.$$

Remarque : Le cosinus de n'importe quel angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

b) Sinus d'un angle aigu.

Définition : Dans le triangle ABC rectangle en A, le sinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$, noté $\sin\widehat{ABC}$, est égal au quotient de la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ par la longueur de l'hypoténuse, c'est-à-dire :

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{\text{AC}}{\text{BC}}.$$

Remarque : Le sinus de n'importe quel angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

c) Tangente d'un angle aigu.

Définition : Dans le triangle ABC rectangle en A, la tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$, noté $\tan\widehat{ABC}$, est égal au quotient de la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ par la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$, c'est-à-dire :

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}.$$

Remarque : La tangente de n'importe quel angle aigu est un nombre positif.

d) Mnémotechnique.

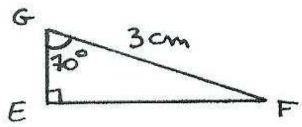
Un moyen mnémotechnique pour retenir les définitions de trigonométrie est de mémoriser :

$$\text{S} = \frac{\text{O}}{\text{H}} \quad ; \quad \text{C} = \frac{\text{A}}{\text{H}} \quad ; \quad \text{T} = \frac{\text{O}}{\text{A}}$$ (SOHCAHTOA)

2 – Applications : Calculer la longueur d'un côté.

a) Avec le cosinus.

Énoncé : Soit EFG un triangle rectangle en E tel que FG = 3 cm et $\widehat{EGF}$ = 70°.
Calculer un arrondi au mm de la longueur EG.

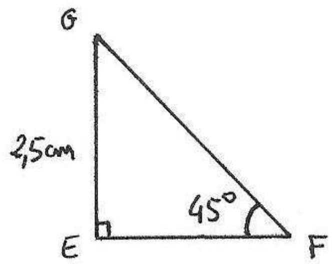


Rédaction : On sait que le triangle EFG est rectangle en E.

Donc $\cos\widehat{EGF} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GF}}$ c'est-à-dire $\cos 70° = \frac{\mathrm{EG}}{3}$ donc EG = 3 × $\cos 70°$ et EG ≈ 1,0 cm.

b) Avec le sinus.

Énoncé : Soit EFG un triangle rectangle en E tel que EG = 2,5 cm et $\widehat{EFG}$ = 45°.
Calculer un arrondi au mm de la longueur GF.

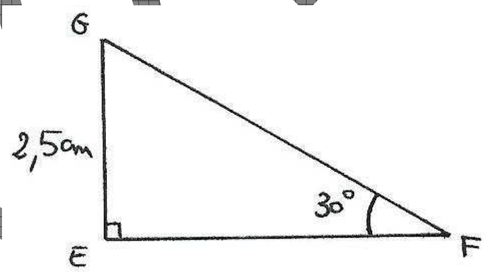


Rédaction : On sait que le triangle EFG est rectangle en E.

Donc $\sin\widehat{EFG} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GF}}$ c'est-à-dire $\sin 45° = \frac{2,5}{\mathrm{GF}}$ donc GF = $\frac{2,5}{\sin 45°}$ et GF ≈ 3,5 cm.

c) Avec la tangente.

Énoncé : Soit EFG un triangle rectangle en E tel que EG = 2,5 cm et $\widehat{EFG}$ = 30°.
Calculer un arrondi au mm de la longueur EF.



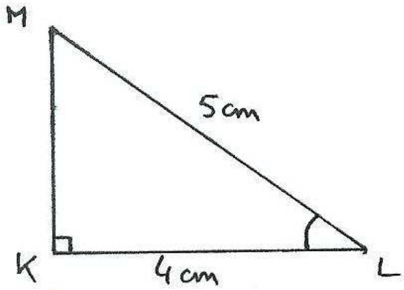
Rédaction : On sait que le triangle EFG est rectangle en E.

Donc $\tan\widehat{EFG} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EF}}$ c'est-à-dire $\tan 30° = \frac{2,5}{\mathrm{EF}}$ donc EF = $\frac{2,5}{\tan 30°}$ et EF ≈ 4,3 cm.

3 – Applications : Calculer la mesure d'un angle.

a) Avec le cosinus.

Énoncé : Soit KLM un triangle rectangle en K tel que KL = 4 cm et ML = 5 cm.
Calculer un arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{KLM}$.

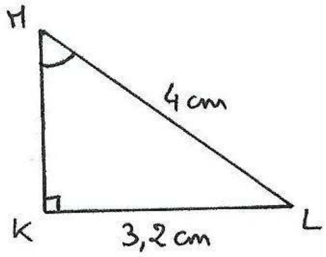


Rédaction : On sait que le triangle KLM est rectangle en K.

Donc $\cos \widehat{KLM} = \frac{\text{KL}}{\text{ML}}$ c'est-à-dire $\cos \widehat{KLM} = \frac{4}{5}$ donc $\widehat{KLM} = \cos^{-1}(\frac{4}{5})$ et $\widehat{KLM} \approx 37°$.

b) Avec le sinus.

Énoncé : Soit KLM un triangle rectangle en K tel que KL = 3,2 cm et ML = 4 cm.
Calculer un arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.

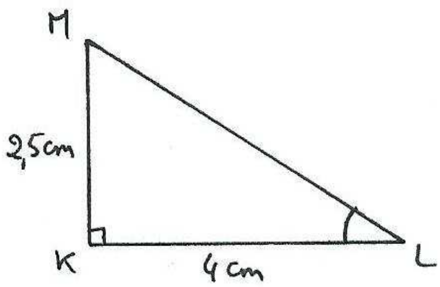


Rédaction : On sait que le triangle KLM est rectangle en K.

Donc $\sin \widehat{LMK} = \frac{\text{KL}}{\text{ML}}$ c'est-à-dire $\sin \widehat{LMK} = \frac{3,2}{4}$ donc $\widehat{LMK} = \sin^{-1}(\frac{3,2}{4})$ et $\widehat{LMK} \approx 53°$.

c) Avec la tangente.

Énoncé : Soit KLM un triangle rectangle en K tel que KL = 4 cm et MK = 2,5 cm.
Calculer un arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{KLM}$.



Rédaction : On sait que le triangle KLM est rectangle en K.

Donc $\tan \widehat{KLM} = \frac{\text{MK}}{\text{KL}}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{KLM} = \frac{2,5}{4}$ donc $\widehat{KLM} = \tan^{-1}(\frac{2,5}{4})$ et $\widehat{KLM} \approx 32°$.

II – Relations trigonométriques.

1 – Propriétés.

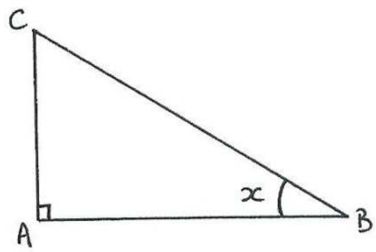
Propriétés : Soit x la mesure en degré de l'un des angles aigus d'un triangle rectangle. On a :

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

<u>Preuve</u> :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = x$.

Alors $\cos x = \frac{\text{AB}}{\text{BC}}$, $\sin x = \frac{\text{AC}}{\text{BC}}$ et $\tan x = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}$.



- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\frac{\text{AB}}{\text{BC}})^2 + (\frac{\text{AC}}{\text{BC}})^2 = \frac{\text{AB}^2}{\text{BC}^2} + \frac{\text{AC}^2}{\text{BC}^2} = \frac{\text{AB}^2 + \text{AC}^2}{\text{BC}^2}$

or, d'après le théorème de Pythagore, on a AB² + AC² = BC², donc $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \frac{\text{BC}^2}{\text{BC}^2} = 1$.

- $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\text{AC}}{\text{BC}}}{\frac{\text{AB}}{\text{BC}}} = \frac{\text{AC}}{\text{BC}} \times \frac{\text{BC}}{\text{AB}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}} = \tan x$

<u>Remarques</u> :

- La 1ère propriété permet de calculer le cosinus d'un angle aigu connaissant le sinus (ou le sinus d'un angle aigu connaissant le cosinus).
- La 2ème propriété permet de calculer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu connaissant deux de ces nombres.

2 – Application.

<u>Énoncé</u> : x est la mesure en degré d'un angle tel que : $\cos x = 0{,}8$.

Calculer le sinus puis la tangente de cet angle.

<u>Rédaction</u> :

- On a : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$. Ainsi : $(0{,}8)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

  On en déduit que : $(\sin x)^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.

  Par conséquent, on a : $\sin x = \sqrt{0{,}36}$, donc $\sin x = 0{,}6$.

- De plus, on a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ainsi : $\tan x = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.