Chapitre 5 : Calcul littéral et équations

I – Rappels.

Définition : Une expression littérale est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.
Si une même lettre apparaît plusieurs fois dans l'expression, elle désigne le même nombre.

1 – Calculer la valeur d'une expression littérale.

- Pour calculer la valeur d'une expression littérale comportant une lettre, on remplace cette lettre par sa valeur numérique, sans oublier de rétablir les signes × sous-entendus, puis on effectue les calculs.

Exemples :

Calculer A = $4x + 3$ pour $x = 5$

A = 4 × 5 + 3
A = 20 + 3
A = 23

Calculer B = $x^2 - 3x + 1$ pour $x = -4$

B = $(-4)^2 - 3 \times (-4) + 1$
B = 16 + 12 + 1
B = 29

ATTENTION : $-x^2 \neq (-x)^2$

Exemple : $\left.\begin{array}{l} -4^2 = -16 \\ (-4)^2 = 16 \end{array}\right\}$ $-4^2 \neq (-4)^2$

2 – Réduire une expression littérale.

- Réduire une expression littérale, c'est l'écrire comme une somme algébrique ayant le moins de termes possibles.

Exemples :

Réduire C = $6 + 2x - 4 + 11 - 3x$
C = $-x + 13$

Réduire D = $5a^2 - 4a - 1 + 2a^2 + a + 3$
D = $7a^2 - 3a + 2$

Remarque : On ne peut pas réduire l'expression $7a^2 - 3a + 2$ car tous ses termes ont des parties littérales différentes.

3 – Développer une expression littérale.

Définition : Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme.

a) Simple distributivité.

Propriété : Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a les égalités suivantes :

- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
- $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Exemple : Développer et réduire l'expression :

E = $3(2x + 5) - 7(3 - 5x)$
E = $3 \times 2x + 3 \times 5 - 7 \times 3 - 7 \times (-5x)$
E = $6x + 15 - 21 + 35x$

$E = 41x - 6$

b) Double distributivité.

Propriété : Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs. On a :

$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$F = (2x + 3)(x + 4)$
$F = 2x \times x + 2x \times 4 + 3 \times x + 3 \times 4$
$F = 2x^2 + 8x + 3x + 12$
$F = 2x^2 + 11x + 12$

$G = (3x - 4)(-x + 2)$
$G = 3x \times (-x) + 3x \times 2 - 4 \times (-x) - 4 \times 2$
$G = -3x^2 + 6x + 4x - 8$
$G = -3x^2 + 10x - 8$

4 – Factoriser une expression littérale.

Définition : Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme en un produit.

Propriété : Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a les égalités suivantes :

- $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$
- $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

$H = -2y - 14$
$H = (\mathbf{-2}) \times y + (\mathbf{-2}) \times 7$
$H = \mathbf{-2}(y + 7)$

$J = 3x - 3y$
$J = \mathbf{3} \times x - \mathbf{3} \times y$
$J = \mathbf{3}(x + y)$

II – Identités remarquables.

1 – Développement.

a) Le carré d'une somme.

Propriété : Quels que soient les nombres a et b, on a : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Preuve :

$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Remarque : $2ab$ est appelé le double produit de a par b, c'est le double du produit ab.

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (x + 5)^2$
$A = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$
$A = x^2 + 10x + 25$

$B = (3x + 4)^2$
$B = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2$
$B = 9x^2 + 24x + 16$

b) Le carré d'une différence.

Propriété : Quels que soient les nombres a et b, on a : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Preuve :

$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a \times a - a \times b - b \times a + b \times b = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$C = (3x - 5)^2$
$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$
$C = 9x^2 - 30x + 25$

$D = (11 - 2x)^2$
$D = 11^2 - 2 \times 11 \times 2x + (2x)^2$
$D = 121 - 44x + 4x^2$

c) Le produit d'une somme par une différence.

Propriété : Quels que soient les nombres a et b, on a : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Preuve :
$(a+b)(a-b)=a\times a-a\times b+b\times a+b\times b=a^2-ab+ab+b^2=a^2-b^2$.

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$E=(5x-7)(5x+7)$
$E=(5x)^2-7^2$
$E=25x^2-49$

$F=(3+9x)(3-9x)$
$F=3^2-(9x)^2$
$F=9-81x^2$

2 – Factorisation.

Propriétés : Quels que soient les nombres a et b, on a :

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Exemples : Factoriser :

$G=x^2+6x+9$
$G=x^2+2\times x\times 3+3^2$
$G=(x+3)^2$

$H=49-56x+16x^2$
$H=7^2-2\times 7\times 4x+(4x)^2$
$H=(7-4x)^2$

$J=36x^2-25$
$J=(6x)^2-5^2$
$J=(6x+5)(6x-5)$

$K=(3x+2)^2-49x^2$
$K=(3x+2)^2-(7x)^2$
$K=[(3x+2)+7x]\times[(3x+2)-7x]$
$K=(10x+2)(-4x+2)$

3 – Calcul mental.

Des exemples avec les identités remarquables :

- $13^2=(10+3)^2=10^2+2\times 10\times 3+3^2=100+60+9=169$.
- $101^2=(100+1)^2=100^2+2\times 100\times 1+1^2=10\,000+200+1=10\,201$.
- $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times 100\times 1+1^2=10\,000-200+1=9\,801$.
- $48^2=(50-2)^2=50^2-2\times 50\times 2+2^2=2\,500-200+4=2\,304$.
- $52\times 48=(50+2)(50-2)=50^2-2^2=2\,500-4=2\,496$.
- $103\times 97=(100+3)(100-3)=100^2-3^2=10\,000-9=9\,991$.

III – Équation du premier degré à une inconnue.

1 – Définitions.

➢ Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, désigné le plus souvent par une lettre.
Elle s'écrit sous la forme $ax+b=cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres relatifs et x est le nombre inconnu.

Exemple : $x + 5 = 14 - 2x$ est une équation d'inconnue x.

- Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu (si elles existent) qui vérifient l'égalité, c'est-à-dire telles que l'égalité soit vraie.

Chacune de ces valeurs est une solution de l'équation.

2 – Propriétés des égalités.

a) Égalité, addition et soustraction.

Propriété : On ne change pas une égalité lorsqu'on ajoute ou on soustrait un même nombre à chacun de ses membres.

a, b et c désignent des nombres relatifs.

- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{a + c = b + c}$.
- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{a - c = b - c}$.

Exemples :

$$x - 11 = 8$$
$+11$ $+11$
$$x - 11 + 11 = 8 + 11$$
$$x = 19$$

$$3x = 2x - 7$$
$-2x$ $-2x$
$$3x - 2x = 2x - 7 - 2x$$
$$x = -7$$

b) Égalité, multiplication et division.

Propriété : On ne change pas une égalité lorsqu'on multiplie ou on divise chacun de ses membres par un même nombre non nul.

a, b et c désignent des nombres relatifs avec $c \neq 0$.

- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{a \times c = b \times c}$.
- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{b}{c}}$.

Exemples :

$$\frac{x}{4} = 7$$
$\times 4$ $\times 4$
$$\frac{x}{4} \times 4 = 7 \times 4$$
$$x = 28$$

$$3x = 12$$
$\div 3$ $\div 3$
$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

3 – Résolution algébrique d'une équation à une inconnue.

a) Méthode générale de résolution.

a) Simplifier au maximum chacun des deux membres de l'équation ;

b) Regrouper les termes en x dans le membre de gauche ;

c) Regrouper les termes constants dans le membre de droite ;

d) Diviser chacun des deux membres par le coefficient de x ;

e) Vérifier la solution trouvée.

f) Conclure : énoncer la solution de l'équation.

b) Exemple : Résoudre l'équation : $4x - 7 = 3(2x + 1)$.

a)

$$4x - 7 = 3 \times 2x + 3 \times 1$$

$$4x - 7 = \underline{\mathbf{6x}} + 3$$

$$-6x \qquad\qquad -6x$$

b)

$$4x - 7 - 6x = 6x + 3 - 6x$$

$$-2x \underline{\mathbf{-7}} = 3$$

$$+7 \qquad\qquad +7$$

c)

$$-2x - 7 + 7 = 3 + 7$$

$$\underline{\mathbf{-2}}x = 10$$

$$\div(-2) \qquad\qquad \div(-2)$$

d)

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{10}{-2}$$

$$x = -5$$

e) On a $4 \times (-5) - 7 = -20 - 7 = -27$ et $3(2 \times (-5) + 1) = 3(-10 + 1) = 3 \times (-9) = -27$.
Donc l'égalité $4x - 7 = 3(2x + 1)$ est vraie pour $x = -5$.

f) -5 est la solution de l'équation : $4x - 7 = 3(2x + 1)$.

IV – Équation produit nul.

1 – Définition.

➢ a, b, c et d désignent des nombres relatifs.
Une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x.

Exemple : $(3x + 4)(2x - 5) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x.

Remarque : $(3x + 4)(2x - 5) = 6x^2 - 7x - 20$. Le plus grand exposant de l'inconnue x est 2.
Cette équation est une équation de degré 2 (ou du second degré).

2 – Propriété.

➢ Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.
Autrement dit : a et b désignent des nombres relatifs. Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarques :

- Les nombres a et b peuvent être tous les deux égaux à zéro.
- Si dans un produit un facteur est nul, alors ce produit est nul.

3 – Résolution d'une équation produit nul.

Exemple : Résoudre l'équation $(3x + 4)(2x - 5) = 0$.
Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.
Donc $3x + 4 = 0$ ou $2x - 5 = 0$.

- $3x + 4 = 0$
  $3x = -4$
  $x = \frac{-4}{3}$
- $2x - 5 = 0$
  $2x = 5$
  $x = \frac{5}{2}$

Les solutions de cette équation sont $\frac{-4}{3}$ et $\frac{5}{2}$.

Remarque : Pour résoudre certaines équations, on va d'abord factoriser afin de se ramener à une équation produit nul.

Exemple : E = $(3x + 2)^2 - 49$. Pour résoudre E = 0, on va d'abord factoriser E.
E = $(3x + 2)^2 - 7^2 = [(3x + 2) + 7][(3x + 2) - 7] = (3x + 9)(3x - 5)$.
Résoudre E = 0 revient donc à résoudre $(3x + 9)(3x - 5) = 0$.
Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.
Donc $3x + 9 = 0$ ou $3x - 5 = 0$.

- $3x + 9 = 0$
  $3x = -9$
  $x = \frac{-9}{3} = -3$
- $3x - 5 = 0$
  $3x = 5$
  $x = \frac{5}{3}$

Les solutions de cette équation sont – 3 et $\frac{5}{3}$.

4 – Résolution d'une équation du type $x^2 = a$, où a est un nombre relatif.

Propriété : a désigne un nombre relatif.
- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution unique 0.
- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 = 121$.
L'équation $x^2 = 121$ a deux solutions : 11 et – 11.