Chapitre 8 : Fonctions linéaires et fonctions affines

I – Synthèse sur la proportionnalité.

1 – Coefficient de proportionnalité.

Définition : Deux listes de nombres sont proportionnelles lorsqu'on obtient chaque nombre de l'une en multipliant le nombre correspondant de l'autre par un même nombre appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple :
Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité car $\frac{3}{5} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = 0,6$.
Et le coefficient de proportionnalité est 0,6.

5	20	25
3	12	15

Propriétés :
- Si un tableau est un tableau de proportionnalité, alors il y a égalité des produits en croix.
- Réciproquement, si tous les produits en croix d'un tableau sont égaux, alors il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

a	c
b	d

$ad = bc$

2 – Méthodes de calcul en situation de proportionnalité.

Exemple : Sur une carte, 7 cm représentent 100 km.
Quelle est la distance représentée par 9 cm ? (arrondir au km)

Distance sur la carte (en cm)	7	9
Distance réelle (en km)	100	x

a) Avec le passage à l'unité.

On calcule la distance réelle correspondant à 1 cm sur la carte.

Pour 7 cm, on a 100 km. Donc pour 1 cm, on a 7 fois mois, soit $\frac{100}{7}$ km.

Et pour 9 cm, on a 9 fois plus, soit $9 \times \frac{100}{7}$ km. Donc 9 cm représentent environ 129 km.

b) Avec le coefficient de proportionnalité.

On calcule le coefficient de proportionnalité : $\frac{100}{7}$. $x = 9 \times \frac{100}{7} \approx 129$ km.

c) Avec les produits en croix.

$7x = 100 \times 9$, donc $x = \frac{100 \times 9}{7} \approx 129$ km.

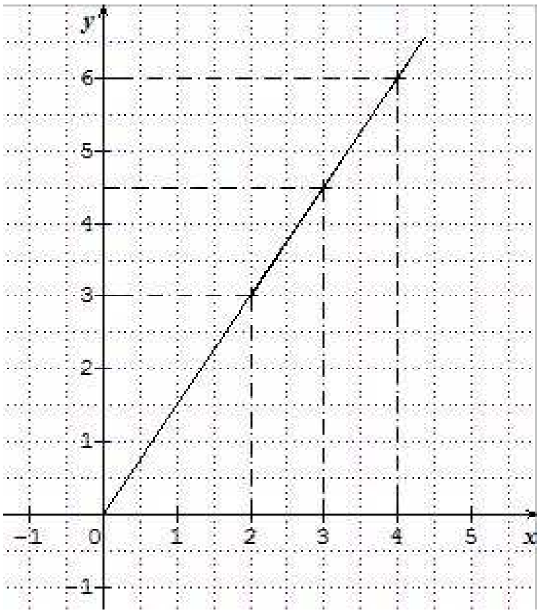
3 – Représentation graphique.

Propriétés :
- Si des points représentent graphiquement une situation de proportionnalité, alors ces points sont alignés avec l'origine du repère.
- Réciproquement, si des points sont alignés avec l'origine du repère, alors ce graphique représente une situation de proportionnalité.

Exemples :

Situation de proportionnalité

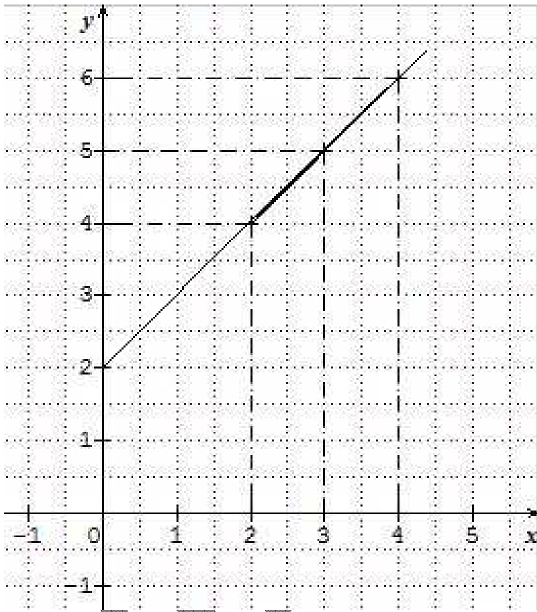
2	3	4
3	4,5	6



Les points obtenus sont alignés avec l'origine du repère : le tableau est un tableau de proportionnalité.

Situation de non proportionnalité

2	3	4
4	5	6



Les points obtenus ne sont pas alignés avec l'origine du repère : le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

II – Fonctions linéaires.

1 – Définition et propriétés des fonctions linéaires.

Définition : a est un nombre donné. La fonction linéaire de coefficient a est la fonction qui, à un nombre x, associe le produit de ce nombre par a.
Si f désigne cette fonction, on la note $f : x \longmapsto ax$. On écrit ainsi $f(x) = ax$.

Remarque : La fonction f peut être décrite par le processus « je multiplie par a ».

Exemples :

- La fonction f définie par $f : x \longmapsto 5x$ est la fonction linéaire de coefficient 5.
- La fonction g définie par $g : x \longmapsto 4x^2$ n'est une fonction linéaire car c'est x^2, et non pas x, qui est multiplié par 4.

Propriété : f est une fonction linéaire de coefficient a avec $a \neq 0$.
Par cette fonction linéaire, tout nombre admet un et un seul antécédent.

Exemple : La fonction h définie par $h : x \longmapsto \frac{x}{3}$ est une fonction linéaire car $h(x) = \frac{x}{3} = \frac{1}{3} \times x$.

Le coefficient est $\frac{1}{3}$.

- Quel est l'image de 2 ? $h(2) = \frac{2}{3}$. L'image de 2 par la fonction h est $\frac{2}{3}$.
- Quel est l'antécédent de – 2 ? On cherche x tel que $h(x) = -2$.
  $\frac{x}{3} = -2$; $x = -2 \times 3$; $x = -6$. (– 6) est l'antécédent de (– 2) par la fonction h.

Propriété : f est une fonction linéaire.

x, x_1, x_2 désignent des nombres et k désigne un nombre donné.
On a : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ et $f(kx) = k\,f(x)$.

Exemple : La fonction linéaire f est telle que $f(4) = 9$ et $f(6) = 13{,}5$.
Donc : $f(10) = f(4 + 6) = f(4) + f(6) = 9 + 13{,}5 = 22{,}5$ et $f(16) = f(4 \times 4) = 4 \times f(4) = 4 \times 9 = 36$.

2 – Fonctions linéaires et proportionnalité.

Propriété : Une situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire.
Le coefficient de cette fonction linéaire est le coefficient de proportionnalité.

Exemple : Un tissu coûte 18 € le mètre. x mètre de tissu coûte $18 \times x$ €.
Le prix à payer est modélisé par une fonction linéaire P : $x \longmapsto 18x$.

3 – Détermination d'une fonction linéaire.

Exemple : Déterminer la fonction linéaire f telle que $f(5) = 4$.
f est une fonction linéaire, par conséquent on peut écrire $f(x) = ax$.
Pour calculer a, on sait que : $f(5) = a \times 5$ et que $f(5) = 4$.
D'où $a \times 5 = 4$. On en déduit que $a = \frac{4}{5} = 0{,}8$.
Donc la fonction f est définie par $f : x \longmapsto 0{,}8x$.

Propriété :
Une fonction linéaire est déterminée dès que l'on connaît un nombre (non nul) et son image.
Il suffit alors de calculer son coefficient $a = \frac{image\ du\ nombre}{nombre}$.

4 – Représentation graphique d'une fonction linéaire.

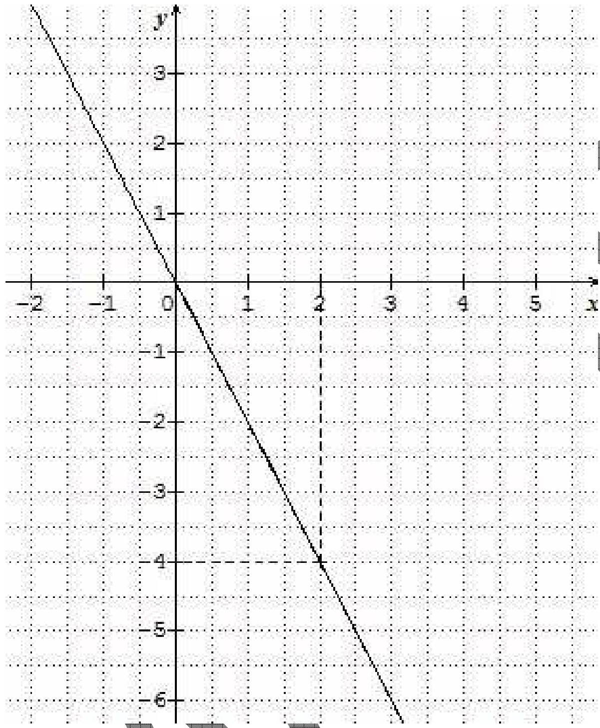
Propriétés :
La représentation graphique de la fonction linéaire $f(x) = ax$ dans un repère est une droite (d) qui passe par l'origine du repère et le point de coordonnées (1 ; a).
Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la droite (d).

Réciproquement, dans un repère, toute droite passant par l'origine (sauf l'axe des ordonnées) est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Méthode : Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il suffit de déterminer deux points de la droite.

Exemple :

Représenter graphiquement la fonction linéaire $f : x \longmapsto -2x$.
Sa représentation graphique est une droite (d) qui passe par l'origine du repère.
Pour tracer la droite (d), on détermine les coordonnées d'un deuxième point.
Par exemple, $f(2) = -2 \times 2 = -4$.
La droite (d) passe par le point de coordonnées $(2 ; -4)$.
-2 est le coefficient directeur de la droite (d).



5 – Augmentation et diminution en pourcentage.

Propriété : Augmenter un nombre positif de p % revient à multiplier ce nombre par $1 + \frac{p}{100}$.

Une augmentation de p % est modélisée par la fonction linéaire $f : x \longmapsto (1 + \frac{p}{100})x$.

Exemple : Un collège comptait 760 élèves. À la rentrée suivante, son effectif a augmenté de 5 %.

Le nouvel effectif du collège est $760 \times (1 + \frac{5}{100}) = 760 \times 1,05 = 798$ élèves.

Propriété : p est un nombre compris entre 0 et 100.

Diminuer un nombre positif de p % revient à multiplier ce nombre par $1 - \frac{p}{100}$.

Une diminution de p % est modélisée par la fonction linéaire $f : x \longmapsto (1 - \frac{p}{100})x$.

Exemple : Le prix d'une chemise est de 45 €, il est diminué de 25 %.

Le nouveau prix est $45 \times (1 - \frac{25}{100}) = 45 \times 0,75 = 33,75$ €.

III – Fonctions affines.

1 – Définition et propriété des fonctions affines.

Définition : a et b désignent deux nombres donnés.
La fonction affine de coefficients a et b est la fonction qui, à un nombre x, associe le nombre $ax + b$.
Si f désigne cette fonction, on la note $f : x \longmapsto ax + b$. On écrit ainsi $f(x) = ax + b$.

Remarque : La fonction f peut être décrite par le processus « je multiplie par a, puis j'ajoute b ».

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto ax$: la fonction est alors une fonction linéaire.
- Si $a = 0$, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto b$: la fonction est alors une fonction constante.

Exemples :

- La fonction f définie par $f : x \longmapsto 3x - 4$ est la fonction affine de coefficients $a = 3$ et $b = 4$.
- La fonction linéaire g définie par $g : x \longmapsto 4x$ est une fonction affine particulière pour laquelle $b = 0$.
- La fonction constante h définie par $h : x \longmapsto 5$ est une fonction affine particulière pour laquelle $a = 0$.

Propriété : Si f est une fonction affine non constante, alors tout nombre admet un et un seul antécédent par la fonction f.

Exemple : La fonction f définie par $f : x \longmapsto -3x + 7$ est une fonction affine avec $a = -3$ et $b = 7$.

- Quel est l'image de $\frac{11}{3}$?

  $f(\frac{11}{3}) = -3 \times \frac{11}{3} + 7 = -11 + 7 = -4$. L'image de $\frac{11}{3}$ par la fonction f est -4.
- Quel est l'antécédent de 8 ? On cherche x tel que $f(x) = 8$.

  $-3x + 7 = 8$; $-3x = 1$; $x = -\frac{1}{3}$. $(-\frac{1}{3})$ est l'antécédent de 8 par la fonction f.

2 – Proportionnalité des accroissements.

Propriété des accroissements :
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Soient x_1 et x_2 deux nombres distincts et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images respectives par f.
L'accroissement $f(x_2) - f(x_1)$ des images $f(x_1)$ à $f(x_2)$ est proportionnel à l'accroissement $x_2 - x_1$ de x_1 à x_2, le coefficient de proportionnalité des accroissements étant a.

On a : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Preuve : Soient x_1 et x_2 deux nombres distincts. On a $f(x_1) = ax_1 + b$ et $f(x_2) = ax_2 + b$.

Donc $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Remarque : Cette propriété permet de calculer le nombre a connaissant deux nombres et leurs images.

3 – Détermination d'une fonction affine.

En utilisant la propriété des accroissements, on peut déterminer une fonction affine lorsqu'on connait deux nombres et leurs images.

Exemple : Déterminer la fonction affine f telle que $f(3) = 6$ et $f(5) = 12$.
f est une fonction affine donc on peut écrire $f(x) = ax + b$.

D'après la propriété des accroissements, on a : $a = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{12 - 6}{5 - 3} = \frac{6}{2} = 3$.

Donc $f(x) = 3x + b$.
Or, on sait que $f(3) = 6$; donc $3 \times 3 + b = 6$; donc $9 + b = 6$; donc $b = 6 - 9 = -3$.
La fonction affine est donc : $f(x) = 3x - 3$.

IV – Représentation graphique d'une fonction affine.

1 – Fonction affine et droite.

Propriétés :

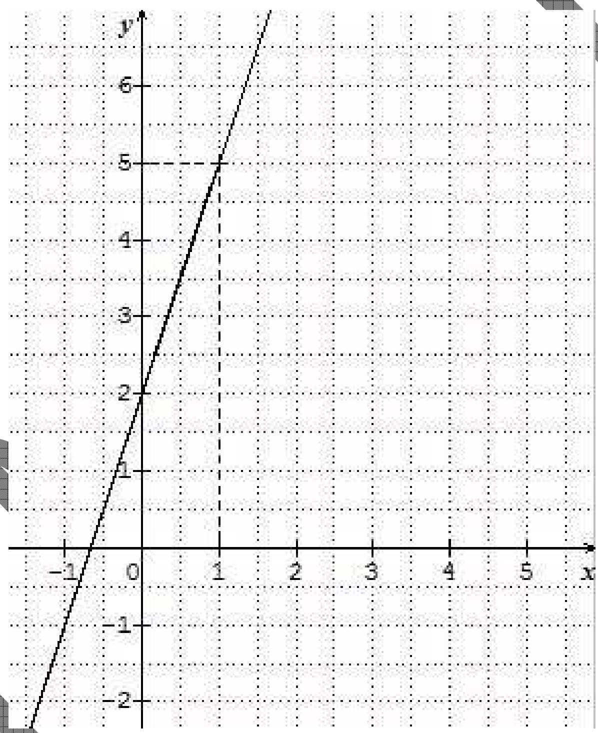
La représentation graphique de la fonction affine $f(x) = ax + b$ dans un repère est une droite (d).
Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la droite (d).
Le nombre b est appelé l'ordonné à l'origine de la droite (d).

Réciproquement, dans un repère, toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Méthode : Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il suffit de déterminer deux points de la droite.

Exemple :

Représenter graphiquement la fonction affine
$f : x \longmapsto 3x + 2$.
Sa représentation graphique est une droite (d).
Pour tracer la droite (d), on détermine les coordonnées de deux points.
Par exemple,
$f(0) = 3 \times 0 + 2 = 2$ et $f(1) = 3 \times 1 + 2 = 5$.
La droite (d) passe par les points de coordonnées $(0 ; 2)$ et $(1 ; 5)$.
3 est le coefficient directeur de la droite (d) et
2 est l'ordonnée à l'origine de la droite (d).

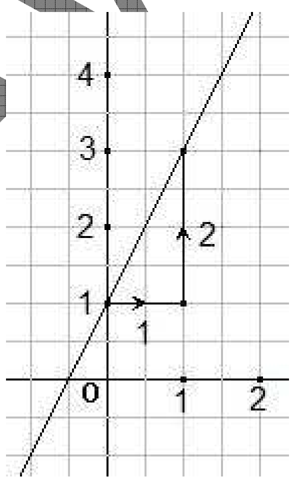


2 – Lecture du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine d'une droite.

Méthode 1 :
Pour lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite :

- on part d'un point sur la droite ;
- puis, on se déplace d'une unité vers la droite (cela revient à augmenter l'abscisse de 1) ;
- enfin, on se déplace verticalement (vers le haut ou vers le bas) pour rejoindre la droite et le nombre d'unités donne le coefficient directeur.

Exemple :



Dans le repère ci-contre, la droite représente une fonction affine f.

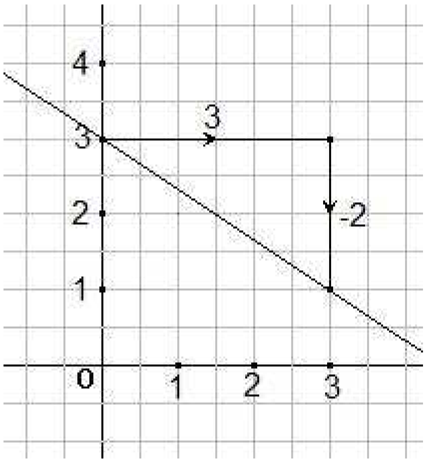
Par lecture graphique, déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite puis donner l'écriture algébrique de la fonction f.

Le coefficient directeur de la droite est 2, l'ordonnée à l'origine est 1 donc l'écriture algébrique de la fonction f est $f(x) = 2x + 1$.

Méthode 2 :
Pour lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite :

- on place deux points sur la droite ;
- puis, on se déplace d'un point à l'autre horizontalement puis verticalement en comptant le nombre d'unités ;
- le coefficient directeur est le quotient $\frac{nombre\ d'unités\ "verticalement"}{nombre\ d'unités\ "horizontalement"}$.

Exemple :



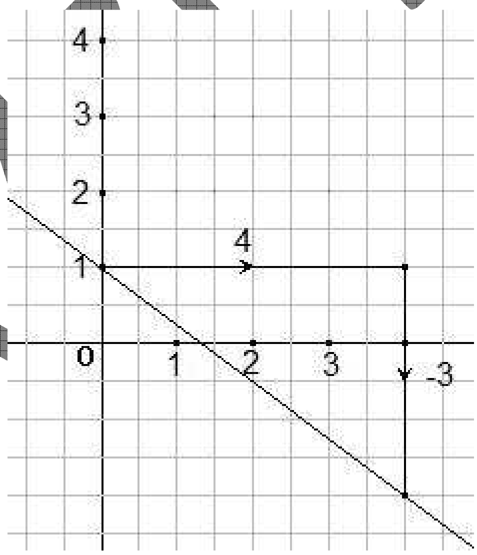
Dans le repère ci-contre, la droite représente une fonction affine f.

Par lecture graphique, déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite puis donner l'écriture algébrique de la fonction f.

Le coefficient directeur de la droite est $-\frac{2}{3}$, l'ordonnée à l'origine est 3 donc l'écriture algébrique de la fonction f est $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$.

Remarque : On peut donc tracer la représentation graphique d'une fonction affine en connaissant le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Exemple : Tracer la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$.



3 – Interprétation du coefficient directeur d'une droite.

Soit la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, la représentation graphique de la fonction f est une droite qui « monte » (on dit que la fonction est croissante).
- Si $a = 0$, la représentation graphique de la fonction f est confondue avec l'axe des abscisses.
- Si $a < 0$, la représentation graphique de la fonction f est une droite qui « descend » (on dit que la fonction est décroissante).