Chapitre 9 : Système de deux équations à deux inconnues

I – Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

1 – Définitions.

- Une équation du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $ax + by = c$ où a, b et c sont des nombres donnés.

Exemple : $6x – 2y = 4$ est une équation du premier degré à deux inconnues x et y.

- Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres donnés.

Exemple : $\begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues x et y.

- Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples (x ; y) vérifiant en même temps les deux équations. Chacun de ces couples est appelé couple solution du système.

Exemple :

➢ Le couple (1 ; 1) est-il solution du système précédent ?
$6 \times 1 – 2 \times 1 = 6 – 2 = 4$ et $2 \times 1 – 1 = 2 – 1 = 1 \neq – 1$.
Donc le couple (1 ; 1) n'est pas solution du système.

➢ Le couple (3 ; 7) est-il solution du système précédent ?
$6 \times 3 – 2 \times 7 = 18 – 14 = 4$ et $2 \times 3 – 7 = 6 – 7 = – 1$.
Donc le couple (3 ; 7) est solution du système.

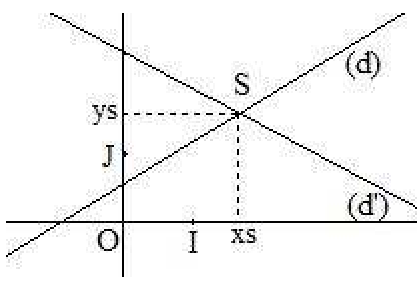
⚠ ATTENTION : Dans un couple de nombres (x ; y), l'ordre des nombres est important.

2 – Interprétation graphique.

- À l'équation $ax + by = c$, on associe la droite (d) d'équation : $y = \frac{-ax + c}{b}$ (on exprime y en fonction de x).
- Au système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, on associe les droites (d) et (d') d'équations respectives : $y = \frac{-ax + c}{b}$ et $y = \frac{-a'x + c'}{b'}$.
- Résoudre le système revient donc à déterminer les coordonnées des points d'intersection des droites (d) et (d') s'il y en a.

Nombre de solutions du système :

➢ Si (d) et (d') sont sécantes, le système a un unique couple solution : le couple (x_S ; y_S) coordonnées du point d'intersection S de (d) et (d').
➢ Si (d) et (d') sont strictement parallèles, le système n'a pas de solution.
➢ Si (d) et (d') sont confondues, le système a une infinité de couples solutions.



Remarque : En 3ème, on se limite aux systèmes ayant un unique couple solution.

II – Résolution d'un système.

1 – Méthode par substitution.

Remarques :

- On utilise cette méthode de préférence quand le coefficient de l'une des deux inconnues est 1.
- Cette méthode consiste à substituer (remplacer) une inconnue par son expression en fonction de l'autre, de façon à obtenir une équation à une inconnue.

Exemple : $\begin{cases} x - 2y = 3 & (E_1) \\ 4x + 5y = 12 & (E_2) \end{cases}$

Dans la première équation (E_1) : le coefficient devant l'inconnue x est 1, on exprime x en fonction de y à partir de cette équation.	$x = 2y + 3$
Dans la seconde équation (E_2) : on remplace x par $2y + 3$ afin d'obtenir une équation à une inconnue y.	$4x + 5y = 12$ $4(2y + 3) + 5y = 12$
On résout cette nouvelle équation pour obtenir la valeur de y.	$4 \times 2y + 4 \times 3 + 5y = 12$ $8y + 12 + 5y = 12$ $13y + 12 = 12$ $13y = 0$ $y = 0$
On remplace y par la valeur obtenue dans l'équation $x = 2y + 3$	$x = 2y + 3$ $x = 2 \times 0 + 3$ $x = 3$
On vérifie que le couple obtenu est solution du système d'équations.	$x - 2y = 3 - 2 \times 0 = 3$ $4x + 5y = 4 \times 3 + 5 \times 0 = 12$

La solution du système $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$ est donc le couple (3 ; 0).

2 – Méthode par combinaison.

Remarque : Cette méthode consiste à multiplier une (ou les deux) équation(s) par des nombres convenablement choisis de sorte que l'on additionne (ou on soustrait) les deux équations, une des deux inconnues disparaisse.

Exemple : $\begin{cases} 5x - 2y = -24 & (E_1) \\ 2x + 4y = 24 & (E_2) \end{cases}$

On multiplie les deux membres de la première équation (E_1) par 2. Ainsi, dans les deux équations, les coefficients devant y sont des nombres opposés.	$2 \times (E_1)$ $\quad 10x - 4y = -48$
On ajoute membre à membre les deux équations ; les termes en y s'annulant, on obtient une équation à une inconnue x.	$2 \times (E_1)$ $\quad 10x - 4y = -48$ (E_2) $\quad + \quad 2x + 4y = 24$ $12x + 0y = -24$
On résout cette équation pour obtenir la valeur de x.	$12x = -24$ $x = -2$
On peut remplacer x par la valeur obtenue dans (E_1) ou (E_2).	$5 \times (-2) - 2y = -24$ $-10 - 2y = -24$ $-2y = -14$ $y = 7$
On vérifie que le couple obtenu est solution du système d'équations.	$5x - 2y = 5 \times (-2) - 2 \times 7 = -24$ $2x + 4y = 2 \times (-2) + 4 \times 7 = 24$

La solution du système $\begin{cases} 5x - 2y = -24 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$ est donc le couple (– 2 ; 7).

3 – Interprétation graphique.

On trace les droites associées à chacune des équations du système. La solution du système est le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Exemple : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$

1ère étape : On exprime y en fonction de x dans chacune des deux équations, ce qui permet de trouver l'équation des deux droites associées :

- droite (d) : $x - 2y = 3$ donc $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
- droite (d') : $4x + 5y = 12$ donc $y = -\frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$

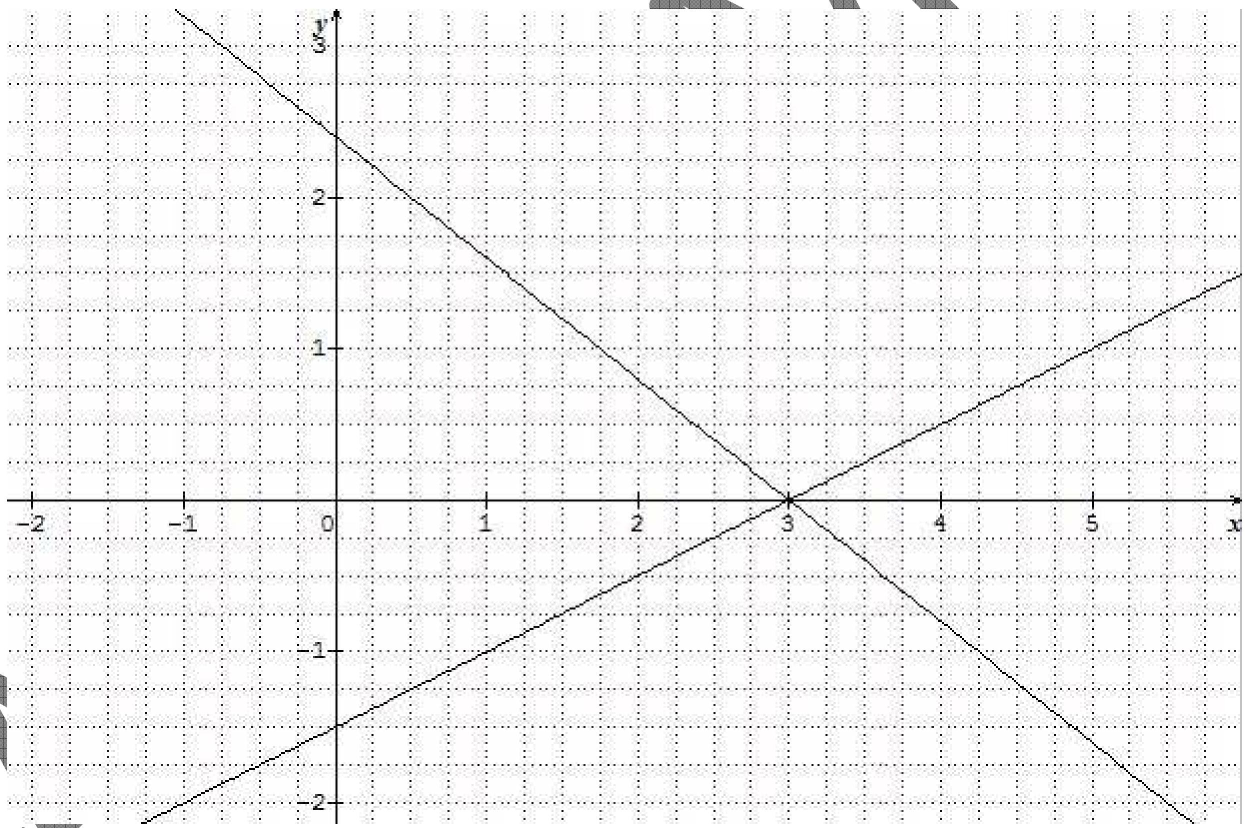
2ème étape : On trace ces deux droites dans un même repère :

- droite (d) :

x	1	2	5
y	– 1	$-\frac{1}{2}$	1

- droite (d') :

x	1	2	5
y	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$



3ème étape : On lit les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') :
Les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') semblent être (3 ; 0).

4ème étape : On vérifie que le couple de coordonnées lues sur le graphique est bien la solution du système : $\begin{cases} 3 - 2 \times 0 = 3 \\ 4 \times 3 + 5 \times 0 = 12 \end{cases}$

⚠ ATTENTION : La vérification est obligatoire.

5ème étape : On conclut : La solution du système est le couple (3 ; 0).