Chapitre 10 : Inégalités – Ordre et opérations

I – Inégalités : notations et définition.

1 – Notations.

Symboles	$a < b$	$a > b$	$a \leq b$	$a \geq b$
Significations	a est strictement inférieur à b	a est strictement supérieur à b	a est inférieur ou égal à b	a est supérieur ou égal à b

Cas particuliers :

Symboles	$x < 0$	$x > 0$	$x \leq 0$	$x \geq 0$
Significations	x est strictement négatif	x est strictement positif	x est négatif ou nul	x est positif ou nul

Exemples :

- 0,5 < 1.
- $x \geq 3$ signifie que x est un nombre supérieur ou égal à 3.

Remarques :

- Si $a < b$ alors $a \leq b$. Mais si $a \leq b$ alors on n'a pas forcément $a < b$.
- De même, si $a > b$ alors $a \geq b$. Mais si $a \geq b$ alors on n'a pas forcément $a > b$.

2 – Définition.

Définition : Une inégalité compare deux nombres à l'aide d'un des symboles : <, >, ≤, ≥.

Exemples :

- 0,5 < 1 et x – 1 ≥ 3 sont des inégalités.
- 5 ≠ 7 n'est pas une inégalité. Cela signifie que la proposition « 5 = 7 » est fausse.

3 – Représentation.

On peut représenter une inégalité sur une droite graduée.

Exemples :

- Tous les nombres x tels que $x < 3$:

- Tous les nombres x tels que $x \geq 2$:

II – Encadrements et valeurs approchées.

1 – Encadrement.

Définitions : a, b et x désignent des nombres relatifs.

- Lorsque $a < x < b$, ou $a \leq x \leq b$, ou $a \leq x < b$, ou $a < x \leq b$, on dit que le nombre x est encadré par les nombres a et b.
- La différence $b - a$ est appelée l'amplitude de cet encadrement.

2 – Troncature et arrondi d'un nombre positif.

Définitions :

- La troncature à l'unité, au dixième, etc… d'un nombre positif est obtenue en gardant tous les chiffres du nombre jusqu'au rang indiqué.
- L'arrondi à l'unité, au dixième, etc… d'un nombre positif dépend du chiffre du rang suivant le rang indiqué :
    - ↳ lorsque ce chiffre est inférieur ou égal à 4, l'arrondi est égal à la troncature au même rang.
    - ↳ lorsque ce chiffre est supérieur ou égal à 5, l'arrondi à l'unité, au dixième, etc… est égal à la troncature au même rang augmentée d'une unité, d'un dixième, etc…

Exemples :

- ➢ À partir du résultat obtenu avec une calculatrice : $23 \div 7 = 3{,}285714286$, on peut dresser le tableau suivant :

	à l'unité	au dixième	au centième
Troncature de $23 \div 7$	3	3,2	3,28
Arrondi de $23 \div 7$	3	3,3	3,29

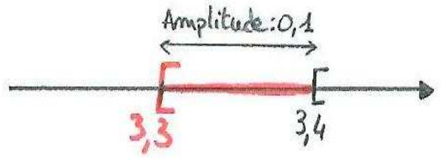
- ➢ Tous les nombres compris entre 3,2 (inclus) et 3,3 (exclu) ont la même troncature au dixième, égale à 3,2.
- ➢ Tous les nombres compris entre 3,25 (inclus) et 3,35 (exclu) ont le même arrondi au dixième, égal à 3,3.

Exercice :

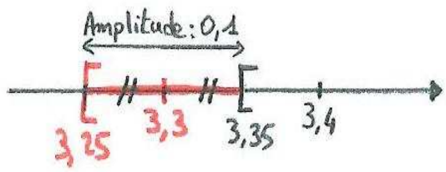
1) Donner la troncature à l'unité puis l'arrondi à l'unité du nombre 7,36.
2) Donner la troncature au dixième puis l'arrondi au dixième du nombre 3,57.

3 – Encadrements, troncatures et arrondis.

Exemple 1 :
Dire que 3,3 est la troncature au dixième d'un nombre x revient à dire que x est un nombre tel que : $3{,}3 \leq x < 3{,}4$.



Exemple 2 :
Dire que 3,3 est l'arrondi au dixième d'un nombre x revient à dire que x est un nombre tel que : $3{,}25 \leq x < 3{,}35$.



III – Comparaison de deux nombres relatifs.

Remarque : On sait déjà comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou en écriture fractionnaire de même dénominateur.

1 – Écritures fractionnaires de dénominateurs différents.

Méthode : Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on peut les réduire au même dénominateur.

Exemple : Comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{9}$.

On a $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$ et $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{18}$. Or, $\frac{15}{18} > \frac{14}{18}$. Donc $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

2 – Signe de la différence.

Propriété : a et b désignent deux nombres relatifs.

- Si $a > b$, alors $a - b > 0$.
- Si $a - b > 0$, alors $a > b$.

Remarque : Cette propriété reste vraie avec les symboles <, ≥, ≤ et =.

Exemples :

- $x - 5 < 0$ revient à dire que $x < 5$.
- $y > 11$ revient à dire que $y - 11 > 0$.

Méthode : Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.

Exemple : Comparer $a = \frac{7}{8}$ et $b = \frac{6}{7}$. On a :

$a - b = \frac{7}{8} - \frac{6}{7} = \frac{7 \times 7}{8 \times 7} - \frac{6 \times 8}{7 \times 8} = \frac{49}{56} - \frac{48}{56} = \frac{1}{56}$. Donc $a - b > 0$. Donc $a > b$ et $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$.

IV – Ordre et opérations.

1 – Addition, soustraction et ordre.

Propriétés : $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ désignent trois nombres relatifs.

- Les nombres $\boldsymbol{a + c}$ et $\boldsymbol{b + c}$ sont rangés dans le même ordre que les nombres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.
  Par exemple : Si $\boldsymbol{a < b}$, alors $\boldsymbol{a + c < b + c}$.
- Les nombres $\boldsymbol{a - c}$ et $\boldsymbol{b - c}$ sont rangés dans le même ordre que les nombres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.
  Par exemple : Si $\boldsymbol{a < b}$, alors $\boldsymbol{a - c < b - c}$.

Exemples :

$$x - 5 < 11$$
$+5$ $+5$
$$x - 5 + 5 < 11 + 5$$
$$x < 16$$

$$y + 13 < 14$$
-13 -13
$$y + 13 - 13 < 14 - 13$$
$$y < 1$$

2 – Multiplication, division et ordre.

Propriétés : $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ désignent trois nombres relatifs.

- Si $\boldsymbol{c > 0}$, alors les nombres $\boldsymbol{a \times c}$ et $\boldsymbol{b \times c}$ (ou $\boldsymbol{\frac{a}{c}}$ et $\boldsymbol{\frac{b}{c}}$) sont rangés dans le même ordre que les nombres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Par exemple : Si $\boldsymbol{a < b}$ et $\boldsymbol{c > 0}$, alors $\boldsymbol{a \times c < b \times c}$ et $\boldsymbol{\frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$.
- Si $\boldsymbol{c < 0}$, alors les nombres $\boldsymbol{a \times c}$ et $\boldsymbol{b \times c}$ (ou $\boldsymbol{\frac{a}{c}}$ et $\boldsymbol{\frac{b}{c}}$) sont rangés dans l'ordre inverse des nombres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Par exemple : Si $\boldsymbol{a < b}$ et $\boldsymbol{c < 0}$, alors $\boldsymbol{a \times c > b \times c}$ et $\boldsymbol{\frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$.

Exemples :

$$5x < 10$$
$\div 5$ $\div 5$
$$\frac{5x}{5} < \frac{10}{5}$$
$$x < 2$$

On divise chaque membre par 5 qui est positif : l'ordre est conservé.

$$\frac{x}{-6} < 3$$
$\times(-6)$ $\times(-6)$
$$\frac{x}{-6} \times (-6) > 3 \times (-6)$$
$$x > -18$$

On multiplie chaque membre par – 6 qui est négatif : l'ordre est inversé.

Propriété : Les opposés de deux nombres sont rangés dans l'ordre inverse de ces nombres.
a et ***b*** désignent deux nombres relatifs. Si ***a* < *b***, alors – ***a* > – *b***.

Exemple : 3 < 5, donc – 3 > – 5.

V – Inéquations du premier degré à une inconnue.

1 – Définitions.

- Une inéquation est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, désigné le plus souvent par une lettre.
- Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'inégalité soit vraie. Les valeurs trouvées sont appelées les solutions de l'inéquation.

2 – Méthode générale de résolution.

a) Simplifier au maximum chacun des deux membres de l'inéquation ;

b) Regrouper les termes en x dans le membre de gauche ;

c) Regrouper les termes constants dans le membre de droite ;

d) Diviser chacun des deux membres par le coefficient de x ;

⚠ **Attention au signe du coefficient de x**

e) Conclure : énoncer les solutions de l'inéquation.

3 – Exemple.

Résoudre l'inéquation : $8 - 6x \leq 2(2x - 1)$

a)

$$8 - 6x \leq 2 \times 2x - 2 \times 1$$

$$8 - 6x \leq \underline{\mathbf{4x}} - 2$$

$-4x$ $-4x$

b)

$$8 - 6x - 4x \leq 4x - 2 - 4x$$

$$\underline{\mathbf{8}} - 10x \leq -2$$

-8 -8

c)

$$8 - 10x - 8 \leq -2 - 8$$

$$\underline{\mathbf{-10}}x \leq -10$$

$\div(-10)$ $\div(-10)$

d)

$$\frac{-10x}{-10} \geq \frac{10}{-10}$$

$$x \geq 1$$

e) Les solutions de cette inéquation sont les nombres supérieurs ou égaux à 1.
Représentation graphique des solutions (les solutions sont en orange) :

Remarque : On représente l'ensemble des solutions d'une inéquation sur une droite graduée. Le crochet indique si l'extrémité fait ou non partie des solutions.