Chapitre 12 : Puissances.

I – Puissances de nombres relatifs.

1 – Puissances d'exposants entiers positifs.

Définition : a désigne un nombre relatif et n un entier positif.

- Pour $n \geq 2$, $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs)
- $a^1 = a$
- Par convention, $a^0 = 1$ avec $a \neq 0$

a^n est une puissance du nombre a et se lit « a exposant n » ou « a puissance n ».

Exemples : $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$; $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 147$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

Remarques :

- $1^n = 1$ avec $n \geq 0$ et $0^n = 0$ avec $n \geq 1$.
- a^2 se lit aussi « a au carré » et a^3 se lit « a au cube ».

ATTENTION AU RÔLE DES PARENTHÈSES :
Pour prendre une puissance d'un nombre négatif, il faut mettre ce nombre entre parenthèses.

Exemples : $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$; $(-6)^2 = (-6) \times (-6) = 36$

Il ne faut pas confondre $(-4)^2$ et -4^2 :
$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$ et $-4^2 = -(4 \times 4) = -16$; donc $(-4)^2 \neq -4^2$

Propriétés :

- Une puissance d'un nombre positif est un nombre positif.
- Une puissance d'exposant pair d'un nombre négatif est un nombre positif.
- Une puissance d'exposant impair d'un nombre négatif est un nombre négatif.

À savoir : Il est utile de connaître les carrés des premiers nombres entiers.

$1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$;

$10^2 = 100$; $11^2 = 121$; $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$.

2 – Puissances d'exposants entiers négatifs.

Définition : a désigne un nombre relatif non nul et n un entier positif non nul.

a^{-n} désigne l'inverse de a^n , c'est-à-dire $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$; $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2)} = -\frac{1}{8}$

Cas particulier : Pour $a \neq 0$, a^{-1} est l'inverse de a. Donc $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

L'inverse de a peut donc se noter $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}.

Exemple : 3^{-1} est l'inverse de 3, donc $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

3 – Règles de calcul sur les puissances.

Propriétés : a et b désignent deux nombres relatifs et n et p deux nombres entiers relatifs.

$$\left.\begin{array}{l} a^n \times a^p = a^{n+p} \\ \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \\ (a^n)^p = a^{n \times p} \end{array}\right\} \text{même nombre, exposants différents}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a \times b)^n = a^n \times b^n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \end{array}\right\} \text{nombres différents, même exposant}$$

Exemples :

- $a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$
- $\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^3} = a^{-3}$
- $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$
- $(a \times b)^2 = a \times b \times a \times b = a^2 \times b^2$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

4 – Ordre des calculs.

Dans une succession d’opérations, on effectue les calculs dans l’ordre suivant :

- les calculs entre parenthèses ;
- les puissances ;
- les multiplications et les divisions ;
- les additions et les soustractions.

II – Cas particulier : les puissances de 10.

1 – Calcul d’une puissance de 10.

Propriétés : n désigne un nombre entier positif.

$10^n = 10 \times \ldots \times 10$ (n facteurs) = 100…00 (n zéros)

et $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ = 0,0…01 (n zéros, n chiffres après la virgule)

Exemples :

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$; $10^7 = 10\,000\,000$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $10^{-5} = 0{,}000\,01$

Remarques : Un million se note 10^6 et un milliard se note 10^9.

2 – Produit par une puissance de 10.

Propriétés : n désigne un nombre entier strictement positif.

Pour multiplier un nombre en écriture décimale :

- par 10^n, on décale la virgule de n rangs vers la droite,
- par 10^{-n}, on décale la virgule de n rangs vers la gauche,

en complétant éventuellement avec des zéros.

Exemples : 25,1 × 10^5 = 2 510 000 et 25,1 × 10^{-5} = 0,000 251

3 – Règles de calcul sur les puissances de 10.

Propriétés : n et p désignent deux nombres entiers relatifs.

- $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$
- $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$
- $(10^n)^p = 10^{n \times p}$

Exemples : $10^{-4} \times 10^9 = 10^{-4+9} = 10^5$; $\frac{10^7}{10^3} = 10^{7-3} = 10^4$; $(10^3)^2 = 10^{3 \times 2} = 10^6$

Remarque :
La somme et la différence de deux puissances de 10 ne sont pas des puissances de 10.
Par exemple : $10^2 + 10^3$ = 100 + 1 000 = 1 100.

4 – Écriture scientifique.

Propriété : Un nombre décimal admet plusieurs écritures de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a désigne un nombre décimal et n un entier relatif.

Exemples :
2 540 000 = 254 × 10^4 = 25,4 × 10^5 = 2,54 × 10^6 = 0,254 × 10^7

0,001 38 = 138 × 10^{-5} = 13,8 × 10^{-4} = 1,38 × 10^{-3} = 0,138 × 10^{-2}

Définition : L'écriture scientifique (ou notation scientifique) d'un nombre décimal est l'unique forme $a \times 10^n$ dans laquelle le nombre a possède un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemples :
L'écriture scientifique de 2 540 000 est 2,54 × 10^6.

L'écriture scientifique de 0,001 38 est 1,38 × 10^{-3}.

Exercice : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

437,65 = 0,006 87 =

III – Utilisation de l'écriture scientifique.

1 – Calculer avec des nombres de la forme $a \times 10^n$.

➢ Pour calculer un produit ou un quotient de nombres de la forme $a \times 10^n$, on regroupe les puissances de 10 d'une part, les autres nombres d'autre part.

Exemple : Calculer à la main et donner le résultat en écriture scientifique.

$$\frac{3 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-7}}{4 \times 10^2} = \frac{3 \times 5}{4} \times \frac{10^4 \times 10^{-7}}{10^2} = \frac{15}{4} \times \frac{10^{4-7}}{10^2} = \frac{15}{4} \times \frac{10^{-3}}{10^2} = 3{,}75 \times 10^{-3-2} = 3{,}75 \times 10^{-5}.$$

➢ Pour calculer une somme ou une différence de nombres de la forme $a \times 10^n$, on écrit chaque terme avec une même puissance de 10 et on factorise par cette puissance de 10.

Exemple : Calculer à la main et donner le résultat en écriture scientifique.

3 × 10^4 + 5,2 × 10^3 = 3 × 10^4 + 0,52 × 10^4 = (3 + 0,52) × 10^4 = 3,52 × 10^4.

OU : 3 × 10^4 + 5,2 × 10^3 = 30 000 + 5 200 = 35 200 = 3,52 × 10^4.

2 – Comparer deux nombres en écriture scientifique.

- Pour comparer deux nombres en écriture scientifique, on écrit chaque nombre comme le produit d'une même puissance de 10 et d'un autre nombre, puis on compare ces deux autres nombres.

Exemple : Comparer 348 × 10^{-5} et 4,5 × 10^{-3}.

348 × 10^{-5} = 348 × 10^{-2} × 10^{-3} = 3,48 × 10^{-3}.

Or 3,48 < 4,5. Donc 348 × 10^{-5} < 4,5 × 10^{-3}.

3 – Encadrement et ordre de grandeur.

Définitions : x désigne un nombre dont l'écriture scientifique est $a \times 10^n$.

- Un encadrement de x par deux puissances consécutives de 10 est : $10^n < x < 10^{n+1}$.
- Un ordre de grandeur de x est $b \times 10^n$, avec b l'arrondi à l'unité de a.

Remarque : Deux puissances de 10 sont consécutives si leurs exposants se suivent.

Exemple : Donner un encadrement et un ordre de grandeur de 734,9 × 10^4.

Pour cela, il suffit d'écrire ce nombre en écriture scientifique.

734,9 × 10^4 = 7,349 × 10^6

Un encadrement de 734,9 × 10^4 est donc : 10^6 < 734,9 × 10^4 < 10^7

L'arrondi à l'unité de 7,349 est : 7

Donc un ordre de grandeur de 734,9 × 10^4 est : 7 × 10^6