

Chapitre 4 : Nombres relatifs en écriture fractionnaire.

I – Quotient de deux nombres relatifs.

1 – Écriture fractionnaire.

Définition 1 : Soient a et b deux nombres relatifs, avec $b \neq 0$.

$\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire, c'est le quotient de a par b .

a est appelé le numérateur et b le dénominateur.

Définition 2 : Lorsque a et b sont des nombres entiers, on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction.

2 – Quotients égaux.

Propriété : La valeur d'une écriture fractionnaire ne change pas lorsque l'on multiplie ou l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Quels que soient les nombres relatifs a , b et k avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$, on a : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$.

Exemples :

❖ Simplification d'une fraction :

$$\frac{-20}{15} = \frac{-4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-4}{3} : \text{on a simplifié } \frac{-20}{15} \text{ par } 5.$$

❖ Transformation d'une écriture fractionnaire en fraction :

$$\frac{0,12}{0,3} = \frac{0,12 \times 100}{0,3 \times 100} = \frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}.$$

Propriété : Quels que soient les nombres a et b avec $b \neq 0$, on a : $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$.

Exemples :

❖ Dans l'exemple précédent, $\frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$. De même, $\frac{-20}{15} = -\frac{20}{15}$.

❖ $\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$.

3 – Égalité des produits en croix.

Propriété : Quels que soient les nombres relatifs a , b , c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$.
- Si $a \times d = b \times c$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemples :

❖ Les fractions $\frac{17}{15}$ et $\frac{221}{195}$ sont-elles égales ?

$$17 \times 195 = 3315 \text{ et } 15 \times 221 = 3315.$$

On constate que $17 \times 195 = 15 \times 221$.

$$\text{Donc : } \frac{17}{15} = \frac{221}{195}.$$

❖ Les fractions $\frac{13}{14}$ et $\frac{167}{182}$ sont-elles égales ?

$$13 \times 182 = 2366 \text{ et } 14 \times 167 = 2338.$$

On constate que $13 \times 182 \neq 14 \times 167$.

$$\text{Donc : } \frac{13}{14} \neq \frac{167}{182}.$$

II – Addition et soustraction de deux nombres en écriture fractionnaire.

1 – Les dénominateurs sont les mêmes.

Propriété : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur :

- on additionne (ou on soustrait) les deux numérateurs,
- on garde le dénominateur commun.

Quels que soient les nombres relatifs a, b et c avec $c \neq 0$, on a : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Exemples :

$$\diamond \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1-4}{5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

$$\diamond \frac{8}{7} - \frac{-2}{7} = \frac{8}{7} + \frac{2}{7} = \frac{8+2}{7} = \frac{10}{7}.$$

2 – Les dénominateurs sont différents.

Propriété : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on doit d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemples :

$$\diamond \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{10}{6} = \frac{13}{6}.$$

$$\diamond \frac{-5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{-5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{-10}{12} + \frac{9}{12} = -\frac{1}{12}.$$

Remarque : Le plus petit dénominateur commun est le Plus Petit Commun Multiple (PPCM).

III – Multiplication de deux nombres en écriture fractionnaire.

Propriété : Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire :

- on multiplie les numérateurs entre eux,
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ et $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$.

Exemples :

$$\diamond \frac{5}{3} \times \frac{-2}{7} = \frac{5 \times (-2)}{3 \times 7} = \frac{-10}{21} = -\frac{10}{21}.$$

$$\diamond \frac{3}{-4} \times \frac{-3}{2} = \frac{3 \times (-3)}{-4 \times 2} = \frac{-9}{-8} = \frac{9}{8}.$$

$$\diamond 5 \times \frac{-3}{13} = \frac{5 \times (-3)}{13} = \frac{-15}{13} = -\frac{15}{13}.$$



Il vaut mieux déterminer le signe du produit et simplifier avant de multiplier.

$$\diamond \frac{15}{-49} \times \frac{-7}{-10} = -\frac{15 \times 7}{49 \times 10} = -\frac{3 \times 5 \times 7}{7 \times 7 \times 2 \times 5} = -\frac{3}{7 \times 2} = -\frac{3}{14}.$$

Prendre une fraction d'une grandeur :

Pour prendre une fraction d'une grandeur, on multiplie cette fraction par cette grandeur.

Exemple : J'ai mangé les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ d'une pizza. Finalement quelle fraction de la pizza ai-je mangée ?

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}, \text{ finalement j'en ai mangé la moitié.}$$

IV – Division de deux nombres en écriture fractionnaire.

1 – Inverse d'un nombre en écriture fractionnaire.

Propriété : Quels que soient les nombres relatifs a et b avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$:

- L'inverse de a est $\frac{1}{a}$ car $a \times \frac{1}{a} = 1$.
- L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ car $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

Exemples :

$$\diamond \text{ L'inverse de } \frac{-5}{7} \text{ est } \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}.$$

$$\diamond \text{ L'inverse de } \frac{1}{3} \text{ est } \frac{3}{1} = 3.$$

2 – Quotient de deux nombres en écriture fractionnaire.

Propriété : Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d avec $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \text{ et } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \text{ c'est-à-dire } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemples :

$$\diamond \frac{-5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{-5}{3} \times \frac{4}{7} = -\frac{5 \times 4}{3 \times 7} = -\frac{20}{21}.$$

$$\diamond \frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{10}.$$