Chapitre 6 : Calcul littéral.

I – Rappels.

Définition : Une expression littérale est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.
Si une même lettre apparaît plusieurs fois dans l'expression, elle désigne le même nombre.

1 – Calculer la valeur d'une expression littérale.

- Pour calculer la valeur d'une expression littérale comportant une lettre, on remplace cette lettre par sa valeur numérique, sans oublier de rétablir les signes × sous-entendus, puis on effectue les calculs.

Exemples :

Calculer A = $4x + 3$ pour $x = 5$

A = 4 × 5 + 3
A = 20 + 3
A = 23

Calculer B = $x^2 - 3x + 1$ pour $x = -4$

B = $(-4)^2 - 3 \times (-4) + 1$
B = 16 + 12 + 1
B = 29

ATTENTION : $-x^2 \neq (-x)^2$

Exemple : $\left.\begin{array}{l} -4^2 = -16 \\ (-4)^2 = 16 \end{array}\right\}$ $-4^2 \neq (-4)^2$

2 – Réduire une expression littérale.

- Réduire une expression littérale, c'est l'écrire comme une somme algébrique ayant le moins de termes possibles.

Exemples :

Réduire C = $6 + 2x - 4 + 11 - 3x$

C = $-x + 13$

Réduire D = $5a^2 - 4a - 1 + 2a^2 + a + 3$

D = $7a^2 - 3a + 2$

Remarque : On ne peut pas réduire l'expression $7a^2 - 3a + 2$ car tous ses termes ont des parties littérales différentes.

II – Règles de suppression des parenthèses.

1 – Parenthèses précédées du signe +.

Règle : Dans une somme, lorsqu'on supprime des parenthèses précédées du signe +, on ne change pas l'expression entre parenthèses.

Exemple : Supprimer les parenthèses et réduire l'expression :

A = $(7x - 2) + (-3x + 5)$
A = $7x - 2 - 3x + 5$
A = $4x + 3$

2 – Parenthèses précédées du signe –.

Règle : Dans une somme, lorsqu'on supprime des parenthèses précédées du signe –, on change le signe de chacun des termes se trouvant dans les parenthèses.

Exemple : Supprimer les parenthèses et réduire l'expression :

B = $(3x^2 - 4x + 5) - (4x^2 - 2x + 3)$
B = $3x^2 - 4x + 5 - 4x^2 + 2x - 3$
B = $-x^2 - 2x + 2$

III – Développer une expression littérale.

Définition : Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme.

1 – Simple distributivité.

Propriété : Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a les égalités suivantes :

- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
- $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Exemple : Développer et réduire l'expression :

A = $3(2x + 5) - 7(3 - 5x)$
A = $3 \times 2x + 3 \times 5 - 7 \times 3 - 7 \times (-5x)$
A = $6x + 15 - 21 + 35x$
A = $41x - 6$

2 – Double distributivité.

Propriété : Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs. On a :

$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

B = $(2x + 3)(x + 4)$
B = $2x \times x + 2x \times 4 + 3 \times x + 3 \times 4$
B = $2x^2 + 8x + 3x + 12$
B = $2x^2 + 11x + 12$

C = $(3x - 4)(-x + 2)$
C = $3x \times (-x) + 3x \times 2 - 4 \times (-x) - 4 \times 2$
C = $-3x^2 + 6x + 4x - 8$
C = $-3x^2 + 10x - 8$

IV – Factoriser une expression littérale.

Définition : Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme en un produit.

Propriété : Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a les égalités suivantes :

- $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$
- $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

A = $-2y - 14$
A = $(\mathbf{-2}) \times y + (\mathbf{-2}) \times 7$
A = $\mathbf{-2}(y + 7)$

B = $3x - 3y$
B = $\mathbf{3} \times x - \mathbf{3} \times y$
B = $\mathbf{3}(x + y)$

V – Tester une égalité littérale.

- Pour tester le résultat d'un calcul littéral, on calcule la valeur de l'expression de départ et la valeur du résultat pour une même valeur numérique de la lettre employée :
  - Si les deux valeurs obtenues ne sont pas égales : il y a une erreur dans le résultat.
  - Si les deux valeurs obtenues sont égales : on ne peut pas conclure.

Exemple 1 : Un élève développe et réduit l'expression $(3x + 1)(x + 2)$.
Il a trouvé le résultat suivant : $(3x + 1)(x + 2) = 3x^2 + 6x + 2$.
Pour contrôler l'exactitude de son résultat, il peut donner une valeur à x.

Pour $x = 1$:

- $(3x + 1)(x + 2) = (3 \times 1 + 1)(1 + 2) = (3 + 1) \times 3 = 4 \times 3 = 12$.
- $3x^2 + 6x + 2 = 3 \times 1^2 + 6 \times 1 + 2 = 3 + 6 + 2 = 11$.

Donc l'égalité proposée par l'élève est fausse. On peut immédiatement conclure que l'élève a commis une erreur, mais on ne sait pas exactement où.

Remarque : Dans le cas où l'égalité est vraie pour la valeur de x essayée, cela ne garantit pas l'exactitude du développement ou de la réduction (mais cela augment la confiance que l'ont peut accorder au résultat trouvé).

Exemple 2 : Tester l'égalité $(x + 1)(x – 1) = x^2 – 3x + 2$ pour $x = 1$.

- $(1 + 1)(1 – 1) = 2 \times 0 = 0$.
- $1^2 – 3 \times 1 + 2 = 1 – 3 + 2 = 0$.

L'égalité est vraie pour $x = 1$. On ne peut pas conclure.