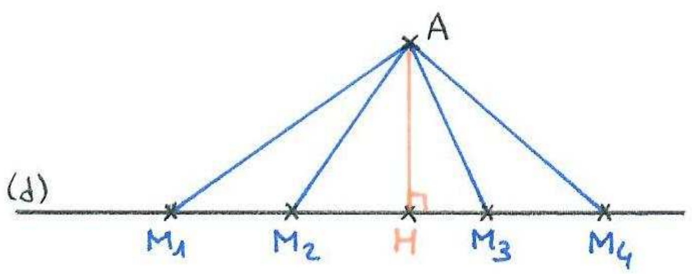
Chapitre 7 : Distance, tangente et bissectrices.

I – Distance d'un point à une droite.

Définition : On considère un point A et une droite (d).
La distance du point A à la droite (d) est la plus petite de toutes les longueurs possibles entre le point A et un point quelconque de la droite (d).

Propriété :
La perpendiculaire à la droite (d) qui passe par le point A coupe la droite (d) en un point H.
La longueur AH est la distance du point A à la droite (d).



$AM_1 > AH$
$AM_2 > AH$
$AM_3 > AH$
$AM_4 > AH$

Cas particulier :
Lorsque le point A appartient à la droite (d), la distance du point A à la droite (d) est égale à 0.

$AH = 0$

Conséquence concernant les triangles rectangles :
Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est son côté le plus long.

Exemple : ABC est un triangle rectangle en A. Son hypoténuse est le côté [BC].
D'où : [BC] est le côté le plus long. Donc : AB < BC et AC < BC.

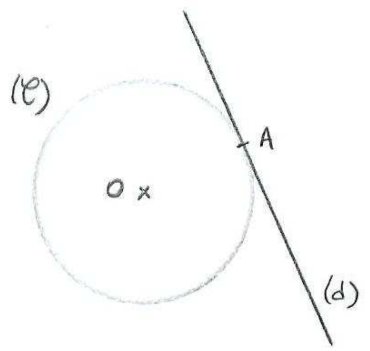
II – Tangente à un cercle en un point.

1 – Définition et propriétés.

Définition : On considère un cercle $(\mathcal{C})$ et un point A appartenant à ce cercle. La tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A est la droite dont le seul point commun avec ce cercle est le point A.

Propriété : Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle. Si la droite (d) est la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A, alors la droite (d) est perpendiculaire à la droite (OA).

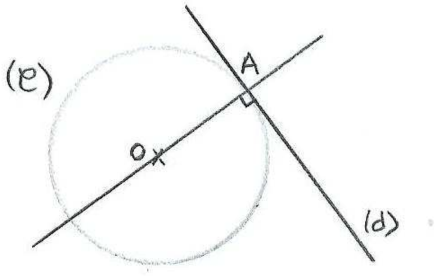
Exemple :



La droite (d) est la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.
Donc, d'après la propriété, (OA) est perpendiculaire à (d).

Propriété réciproque : Soit (𝒞) un cercle de centre O et A un point de ce cercle. Si une droite passe par le point A et est perpendiculaire à la droite (OA), alors cette droite est la tangente au cercle (𝒞) en A.

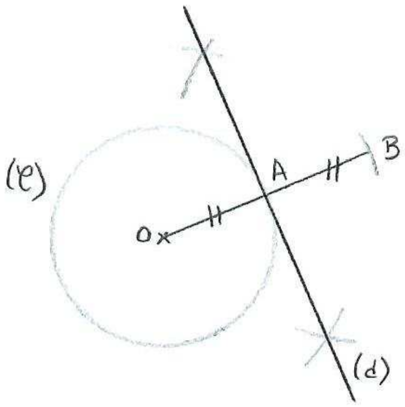
Exemple :



Le point A appartient au cercle (𝒞) de centre O.
On a : A ∈ (d) et (OA) est perpendiculaire à (d).
Donc, d'après la propriété, la droite (d) est tangente au cercle (𝒞) en A.

2 – Construction d'une tangente à la règle et au compas.

Construction



Programme de construction

1) On considère un cercle (𝒞) de centre O et un point A de ce cercle.

2) On construite le symétrique B du point O par rapport au point A.

3) On construit la médiatrice (d) du segment [OB].

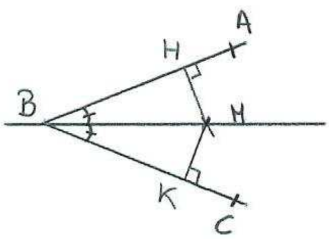
4) La droite (d) est la droite perpendiculaire à la droite (OB) passant par le point A. Donc, la droite (d) est la tangente au cercle (𝒞) en A.

III – Bissectrice d'un angle.

Définition : La bissectrice d'un angle est la droite, ou la demi-droite, qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Propriété : Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.

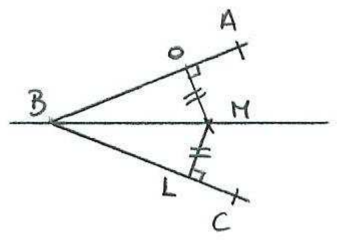
Exemple :



Le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, donc MH = MK.

Propriété réciproque : Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Exemple :



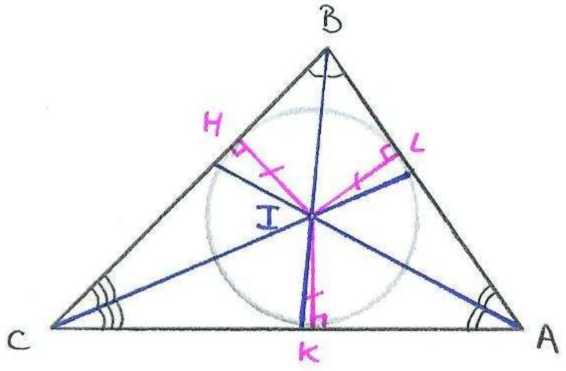
Le point M est équidistant des droites (AB) et (BC), donc le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

.

IV – Cercle inscrit dans un triangle.

Propriétés : Dans un triangle, les bissectrices des trois angles sont concourantes.
Leur point de concours est équidistant des trois côtés du triangle.

Définition : Le point d'intersection des trois bissectrices d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans ce triangle : c'est le cercle tangent à chacun des trois côtés de ce triangle.



Le cercle inscrit dans ce triangle ABC a pour centre I et il est tangent aux trois côtés du triangle ABC en H, K et L.