Chapitre 8 : Équations du premier degré à une inconnue

I – Généralités.

- Soit une égalité A = B.

A est appelé le membre de gauche ou le premier membre de l'égalité.
B est appelé le membre de droite ou le second membre de l'égalité.

- Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, désigné le plus souvent par une lettre.

Elle s'écrit sous la forme $ax + b = cx + d$ où a, b, c et d dont des nombres relatifs et x est le nombre inconnu.

Exemple : $x + 5 = 14 – 2x$ est une équation d'inconnue x.

- Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu (si elles existent) qui vérifient l'égalité, c'est-à-dire telles que l'égalité soit vraie.

Chacune de ces valeurs est une solution de l'équation.

Exemple : On considère l'équation $x + 5 = 14 – 2x$.

❖ *2 est-il solution de cette équation ?*
2 est solution de cette équation si lorsqu'on calcule le membre de gauche et le membre de droite pour $x = 2$, il y a égalité.

- $2 + 5 = 7$
- $14 – 2 \times 2 = 14 – 4 = 10$

L'égalité n'est pas vérifiée pour $x = 2$, donc 2 n'est pas solution de cette équation.

❖ *3 est-il solution de cette équation ?*
3 est solution de cette équation si lorsqu'on calcule le membre de gauche et le membre de droite pour $x = 3$, il y a égalité.

- $3 + 5 = 8$
- $14 – 2 \times 3 = 14 – 6 = 8$

L'égalité est vérifiée pour $x = 3$, donc 3 est solution de cette équation.

II – Égalité et opérations.

1 – Vocabulaire.

Dire qu'une égalité ne change pas signifie que :
si elle est vraie, elle reste vraie et si elle est fausse, elle reste fausse.

2 – Égalité, addition et soustraction.

Propriété : On ne change pas une égalité lorsqu'on ajoute ou on soustrait un même nombre à chacun de ses membres.

a, b et c désignent des nombres relatifs.

- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{a + c = b + c}$.
- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{a - c = b - c}$.

Exemples :

$$x - 11 = 8$$
$$+11 \qquad\qquad +11$$
$$x - 11 + 11 = 8 + 11$$
$$x = 19$$

$$3x = 2x - 7$$
$$-2x \qquad\qquad -2x$$
$$3x - 2x = 2x - 7 - 2x$$
$$x = -7$$

3 – Égalité, multiplication et division.

Propriété : On ne change pas une égalité lorsqu'on multiplie ou on divise chacun de ses membres par un même nombre non nul.

a, b et c désignent des nombres relatifs avec $c \neq 0$.

- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{a \times c = b \times c}$.
- Si $\boldsymbol{a = b}$, alors $\boldsymbol{\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}}$.

Exemples :

$$\frac{x}{4} = 7 \quad \times 4$$

$$\frac{x}{4} \times 4 = 7 \times 4$$

$$x = 28$$

$$3x = 12 \quad \div 3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

III – Équations de référence.

1 – Équations d'inconnue x, de la forme $a + x = b$.

L'équation $a + x = b$ admet une seule solution : $x = b - a$.

Exemple : Résoudre l'équation $3 + x = -7$. On obtient donc : $x = -7 - 3$.
La solution de l'équation $3 + x = -7$ est le nombre -10.

2 – Équations d'inconnue x, de la forme $ax = b$, avec $a \neq 0$.

L'équation $ax = b$, avec $a \neq 0$, admet une seule solution : $x = \dfrac{b}{a}$.

Exemple : Résoudre l'équation $-5x = 3$. On obtient donc : $x = \dfrac{3}{-5}$.

La solution de l'équation $-5x = 3$ est le nombre $-\dfrac{3}{5}$.

IV – Résolution algébrique d'une équation à une inconnue.

1 – Méthode générale de résolution.

a) Simplifier au maximum chacun des deux membres de l'équation ;

b) Regrouper les termes en x dans le membre de gauche ;

c) Regrouper les termes constants dans le membre de droite ;

d) Diviser chacun des deux membres par le coefficient de x ;

e) Vérifier la solution trouvée.

f) Conclure : énoncer la solution de l'équation.

2 – Exemple : Résoudre l'équation : $4x - 7 = 3(2x + 1)$.

a)
$$4x - 7 = 3 \times 2x + 3 \times 1$$
$$4x - 7 = \underline{\mathbf{6x}} + 3$$
$$-6x \qquad\qquad -6x$$

b)
$$4x - 7 - 6x = 6x + 3 - 6x$$
$$-2x \underline{\mathbf{-7}} = 3$$
$$+7 \qquad\qquad +7$$

c)
$$-2x - 7 + 7 = 3 + 7$$
$$\underline{\mathbf{-2}}x = 10$$
$$\div(-2) \qquad\qquad \div(-2)$$

d)
$$\frac{-2x}{-2} = \frac{10}{-2}$$
$$x = -5$$

e) On a $4 \times (-5) - 7 = -20 - 7 = -27$ et $3(2 \times (-5) + 1) = 3(-10 + 1) = 3 \times (-9) = -27$.
Donc l'égalité $4x - 7 = 3(2x + 1)$ est vraie pour $x = -5$.

f) -5 est <u>la</u> solution de l'équation : $4x - 7 = 3(2x + 1)$.

V – Résolution d'un problème.

1 – Méthode générale de résolution.

1ère étape :
Choisir l'inconnue (c'est généralement le nombre ou l'un des nombres cherché(s), on le note x).

2ème étape :
Mettre le problème en équation (en traduisant toutes les informations de l'énoncé en fonction de x).

3ème étape :
Résoudre l'équation.

4ème étape :
Vérifier le résultat en revenant à l'énoncé.

5ème étape :
Interpréter le résultat et conclure : énoncer la solution en veillant à ce que la solution de l'équation soit compatible avec le problème.

2 – Exemple.

a – Énoncé du problème.

Deux amies, Naïs et Jeanne, collectionnent les timbres.
« J'en possède 40 de moins que toi » dit Naïs.
« J'en ai trois fois plus que toi » dit Jeanne.
Combien de timbres possède Naïs ?

b – Résolution du problème.

1ère étape :
On désigne par x le nombre de timbres que possède Naïs. x est un nombre entier positif.

2ème étape :
Jeanne possède alors $3x$ timbres ou bien $x + 40$ timbres. On a donc : $3x = x + 40$.

3ème étape :

$$3x = x + 40$$

$$-x \quad\quad\quad\quad -x$$

$$3x - x = x + 40 - x$$

$$2x = 40$$

$$\div 2 \quad\quad\quad\quad \div 2$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

4ème étape :

Le résultat vérifie bien les informations de l'énoncé : 3 × 20 = 60 et 20 + 40 = 60.

5ème étape :

Le résultat est un nombre entier positif ; ce résultat est cohérent. Naïs possède 20 timbres.