Chapitre 9 : Triangles et droites parallèles

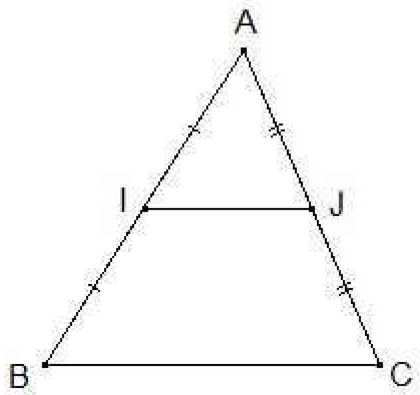
I – Droite des milieux.

1 – Théorème direct.

1er énoncé : Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

2ème énoncé : Dans un triangle, si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

Exemple :



Dans le triangle ABC :

- le point I est le milieu du côté [AB] ;
- le point J est le milieu du côté [AC].

Donc, d'après le théorème de la droite des milieux, (IJ) est parallèle à (BC) et IJ = $\frac{BC}{2}$.

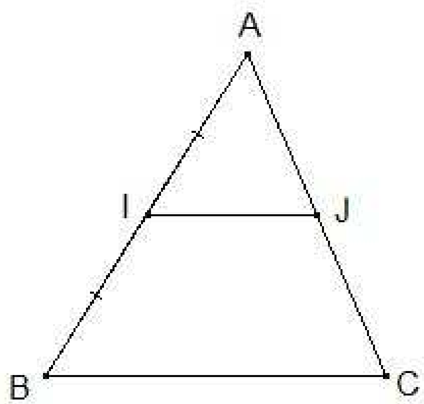
Remarques :

- Le 1er énoncé sert à prouver que deux droites sont parallèles.
- Le 2ème énoncé sert à calculer la longueur d'un segment.

2 – Théorème réciproque.

Énoncé : Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Exemple :



Dans le triangle ABC :

- le point I est le milieu du côté [AB] ;
- (IJ) est parallèle à (BC).

Donc, d'après la réciproque du théorème de la droite des milieux, le point J est le milieu du côté [AC].

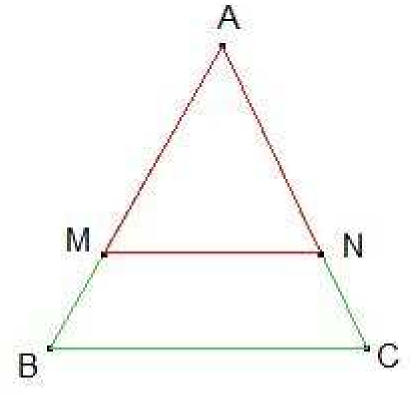
Remarque : Cet énoncé sert à prouver qu'un point est le milieu d'un segment.

II – Théorème de Thalès dans un triangle.

1 – Configuration.

On considère le triangle ABC.
M est un point du côté [AB] et N est un point du côté [AC] tels que (MN) soit parallèle à (BC).
On associe deux à deux les côtés des triangles ABC et AMN.

Côtés du triangle ABC	[AB]	[AC]	[BC]
Côtés du triangle AMN	[AM]	[AN]	[MN]



2 – Énoncé.

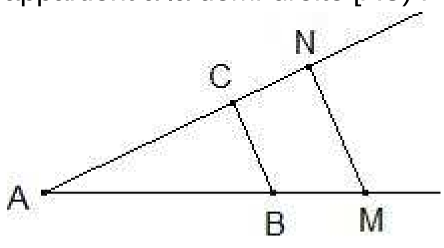
Soit un triangle ABC. Soit M un point du côté [AB] et N un point du côté [AC].

Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (ou $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$).

Autrement dit : Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), alors les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés correspondants du triangle ABC. (Les côtés correspondants sont portés par une même droite ou deux droites parallèles.)

Remarques :

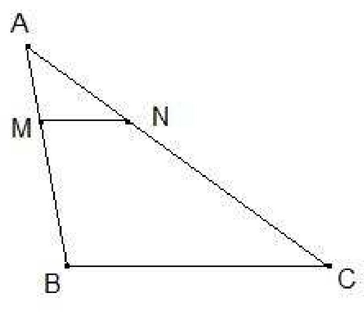
- C'est un cas particulier du théorème de Thalès qui sera vu en classe de 3ème.
- Ce théorème s'étend au cas où le point M appartient à la demi-droite [AB) et le point N appartient à la demi-droite [AC) :



Si (MN) // (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

3 – Application : calcul de longueurs.

Énoncé :
Soit ABC un triangle.
Soient M ∈ [AB] et N ∈ [AC] tels que (MN) // (BC).
On a : AM = 1,2 cm ; AB = 3,6 cm ; AN = 2 cm et BC = 4,2 cm.
Calculer les longueurs AC et MN.



Rédaction :
On sait que dans le triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et (MN) // (BC).
Donc, d'après le théorème de Thalès dans le triangle, on a :
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, c'est-à-dire $\frac{1,2}{3,6} = \frac{2}{AC} = \frac{MN}{4,2}$.

Calcul de AC : $\frac{1,2}{3,6} = \frac{2}{AC}$ donc AC = $\frac{2 \times 3,6}{1,2}$ = 6. Donc AC = 6 cm.

Calcul de MN : $\frac{1,2}{3,6} = \frac{MN}{4,2}$ donc MN = $\frac{1,2 \times 4,2}{3,6}$ = 1,4. Donc MN = 1,4 cm.

III – Agrandissement et réduction.

Définitions :

- On dit qu'un objet est un agrandissement ou une réduction d'un autre objet lorsque leurs longueurs sont proportionnelles.
- Le coefficient de proportionnalité est alors appelé coefficient d'agrandissement ou coefficient de réduction suivant le cas.

Propriétés :

- Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs de deux objets est strictement supérieur à 1, alors c'est un coefficient d'agrandissement.
- Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs de deux objets est strictement compris entre 0 et 1, alors c'est un coefficient de réduction.

Remarque : Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs de deux objets est égal à 1, alors les deux objets ont les mêmes dimensions.

Propriété : Les agrandissements et les réductions conservent les angles, la perpendicularité et le parallélisme.

Exemple : Dans l'application précédente, on a $\frac{AM}{AB} = \frac{1,2}{3,6} = \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ est un nombre strictement compris entre 0 et 1, donc le triangle AMN est une réduction du triangle ABC.

Le coefficient de réduction est égal à $\frac{1}{3}$.