Chapitre 10 : Proportionnalité – Pourcentage – Échelles.

I – Reconnaître la proportionnalité.

Définition : Un tableau est un tableau de proportionnalité si on passe d'une ligne à l'autre en multipliant ou en divisant par un nombre, toujours le même.
Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple 1 : Le prix payé pour un achat de carburant est proportionnel au nombre de litres mis dans le réservoir.

Volume en L	10	20	30	40
Prix en €	15	30	45	60

× 1,5

Ce tableau est un tableau de proportionnalité.
Le coefficient de proportionnalité de la première vers la seconde est **1,5**.
Il représente ici le prix d'un litre de carburant.

[On peut exprimer le prix P en euros en fonction du volume V en litres : P = **1,5** × V.
On note aussi parfois : P(10 L) = 15 € ; P(20 L) = 30 € ; …].

Exemple 2 : La taille d'un enfant n'est pas proportionnelle à son âge.

Âge en années	5	10	15	25
Taille en cm	110	145	175	187

Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.
Le coefficient multiplicateur de la première ligne vers la seconde est différent pour chaque colonne.

Remarque : Dans un tableau de proportionnalité :

- un nombre de la seconde ligne s'obtient en multipliant le nombre correspondant de la première ligne par le coefficient de proportionnalité ;
- un nombre de la première ligne s'obtient en divisant le nombre correspondant de la seconde ligne par le coefficient de proportionnalité.

II – Compléter un tableau de proportionnalité.

Propriété – Définition : Lorsque dans deux colonnes d'un tableau de proportionnalité on connaît trois nombres, on peut calculer le quatrième, appelé quatrième proportionnelle.

Exemple : La quantité d'eau, en litres, que l'on utilise pour arroser une pelouse est proportionnelle à l'aire, en m², de cette pelouse.

Aire en m²	3	5	6	**C**	21	27
Masse en kg	12	**A**	**B**	32	**D**	**E**

Voici plusieurs méthodes pour compléter ce tableau de proportionnalité :

1 – Passage à l'unité ou « règle de trois ».

Case « **A** » :

- Pour arroser 3 m² de pelouse, 12 L sont nécessaires, donc pour arroser 1 m², on a besoin de trois fois moins d'eau, soit 4 L (en effet, $\frac{12}{3}$ = 4). ***[C'est le passage à l'unité.]***

- Pour arroser 5 m², on a besoin de 5 fois plus d'eau, soit 20 L (en effet, 5 × 4 = 20).

  Donc **A** = 20. On peut résumer ces calculs ainsi : **A** = $\frac{12 \times 5}{3}$ = 20.

  [On effectue une « règle de trois » ; cela exprime le fait qu'interviennent trois nombres.]

2 – En utilisant le coefficient de proportionnalité.

Case « **B** » :

× 4

3	6
12	**24**

Case « **C** » :

÷ 4

3	**8**
12	32

3 – En multipliant ou en divisant une « colonne » par un nombre (non nul).

On repère une colonne qui, par multiplication ou division, donne le nombre demandé dans la question.

Case « **D** » :

× 7

3	21
12	**84**

Remarque : C'est une propriété de la linéarité.

4 – En additionnant ou en soustrayant deux « colonnes » du tableau.

On repère une addition (ou une soustraction) possible en deux colonnes.

Case « **E** » :

\+

6	21	27
24	84	**108**

III – Utiliser la proportionnalité.

1 – Calcul d'un pourcentage.

- Calculer un pourcentage, c'est écrire une proportion de dénominateur 100.

Exemple : Parmi les 25 élèves d'une classe de cinquième, 7 portent des lunettes.

Proportion des porteurs de lunettes dans cette classe : $\frac{7}{25}$ = 0,28 = $\frac{28}{100}$ ou 28 %.

Remarque : 28 % se lit « vingt huit pour cent » en français et s'écrit $\frac{28}{100}$ en mathématiques.

- Calculer un pourcentage, c'est aussi calculer une quatrième proportionnelle.

Exemple : Parmi les 225 élèves de cinquième d'un collège, 36 font du latin.

Cinquièmes	225	100
Latinistes	36	**16**

× $\frac{36}{225}$ = 0,16

Donc 16 % des élèves de cinquième de ce collège font du latin.

Remarque : 16 % se lit « seize pour cent » en français et s'écrit $\frac{16}{100}$ en mathématiques.

2 – Échelle d'un plan.

Définition :
Sur un plan à l'échelle, les longueurs sur le plan sont proportionnelles aux longueurs réelles.
L'échelle du plan est le quotient d'une longueur sur le plan par la longueur réelle correspondante :

$$\text{échelle du plan} = \frac{longueur\ sur\ le\ plan}{longueur\ réelle\ correspondante}$$

ATTENTION : Les longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

Remarque : Une échelle est souvent représentée par une fraction dont le numérateur ou le dénominateur est égal à 1.

a) Réduction.

Définition : Si l'échelle est un nombre inférieur à 1, le dessin est une réduction.

Exemple : L'échelle est exprimée avec une fraction de numérateur 1.
Sur une carte, 5 cm représente 100 km. Donc 1 cm représente 20 km, soit 2 000 000 cm.
Cette carte est donc à l'échelle $\frac{1}{2\,000\,000}$ (on dit « une carte aux deux millionièmes »).

b) Agrandissement.

Définition : Si l'échelle est un nombre supérieur à 1, le dessin est un agrandissement.

Exemple : Un horloger examine le plan d'une montre à l'échelle 2,5. Cela signifie qu'une roue dentée de diamètre réel 4 mm aura sur le plan un diamètre de 2,5 × 4 mm, soit 10 mm.

3 – Convertir les unités de temps.

À savoir :

- 1 jour = 24 h
- 1 h = 60 min = 3 600 s
- 1 min = $\frac{1}{60}$ h = 60 s

- 0,1 h = 6 min
- 0,5 h = 30 min
- 0,25 h = 15 min

a) 1ère Méthode : à l'aide d'un tableau.

Exemple : Convertir 2 h 12 min en heures.

Étapes :

(1) Je construis un tableau en mettant dans une colonne 1 h qui correspond à 60 min.
(2) Le coefficient de proportionnalité est 60.
(3) J'effectue le calcul.
(4) Je conclus.

Solution :

Durée (en min)	60	12
Durée (en h)	1	**0,2**

12 ÷ 60 = 0,2.
12 min correspondent à 0,2 h.
Donc 2 h 12 min = 2,2 h.

Exercice : Convertir en heures 4 h 36 min ; 1 h 54 min et 48 min.

b) 2ème Méthode : à l'aide de fractions.

Exemple : Convertir 3 h 24 min en heures.

Étapes :

(1) J'utilise la fraction donnant 1 min en heure.

(2) Je multiplie le nombre de minutes par $\frac{1}{60}$.

(3) Je donne, si possible, l'écriture décimale de la fraction.

(4) Je conclus.

Solution :

On sait que 1 min = $\frac{1}{60}$ h.

Donc 24 min = $\frac{24}{60}$ h = 0,4 h.

24 min correspondent à 0,4 h.

Donc 3 h 24 min = 3,4 h.

Exercice : Convertir en heures 5 h 06 min ; 42 min et 2 h 18 min.

4 – Complément sur les unités de temps.

a) Addition.

1er Exemple :

	4h 30min 15s
+	2h 21min 20s
=	6h 51min 35s

2ème Exemple :

	5h 30min 15s	
+	6h 52min 48s	
=	11h 82min 63s	= 11h 83min 3s = 12h 23min 3s

b) Soustraction.

1er exemple :

	4h 10min 20s
–	2h 5min 15s
=	2h 5min 5s

2ème exemple :

$$\begin{Bmatrix} \quad 5\text{h } 30\text{min } 20\text{s} \\ -\ 3\text{h } 42\text{min } 32\text{s} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \quad 4\text{h } 90\text{min } 20\text{s} \\ -\ 3\text{h } 42\text{min } 32\text{s} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \quad 4\text{h } 89\text{min } 80\text{s} \\ -\ 3\text{h } 42\text{min } 32\text{s} \end{Bmatrix} = 1\text{h } 47\text{min } 48\text{s}$$