Chapitre 3 : Initiation au calcul littéral et aux équations.

I – Généralités sur le calcul littéral.

1 – Définitions.

- Un calcul littéral est un calcul qui utilise des lettres. Il sert, par exemple, à :
  - établir une formule ;
  - trouver un nombre inconnu ;
  - prouver un résultat.
- Une expression littérale est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.

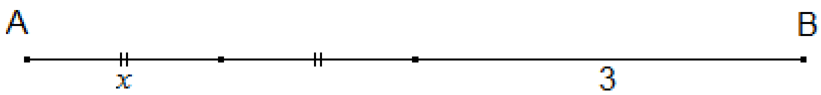
2 – Expression « en fonction de … ».

Définition :

Écrire un résultat « en fonction de x », c'est l'écrire en une expression littérale où figure x.

Exemples :

a) Écrire la longueur *AB* en fonction de x.



Longueur *AB* écrite en fonction de x : $AB = 2 \times x + 3$.
b) J'ai choisi un nombre x. Je l'ai multiplié par 3, puis j'ai ajouté 7.
Écrire le résultat en fonction de x. Résultat écrit en fonction de x : $3 \times x + 7$.

3 – Simplifications d'écritures.

Conventions d'écriture :

- Dans une multiplication, les nombres s'écrivent devant les lettres et les parenthèses.
- Le signe de multiplication × peut être supprimé devant une lettre ou une parenthèse.
- Dans une multiplication, le nombre 1 peut être supprimé devant une lettre ou une parenthèse.
- $a \times a$ se note a^2. a^2 se lit « a exposant 2 » ou « a au carré ».
- $a \times a \times a$ se note a^3. a^3 se lit « a exposant 3 » ou « a au cube ».

Exemples :

$a \times 4 = 4a$
$(3 + x) \times 2 = 2(3 + x)$; $2(3 + x)$ se lit « 2 facteur de $3 + x$ »
$b \times x = bx$
$x \times 3 \times x = 3x^2$
$y \times 1 = y$
$(5x + 2) \times 1 = 5x + 2$
$1 \times a = a$

II – Réduction d'une expression littérale.

- Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

1 – Réduire une somme.

Règle : Pour réduire une somme, on regroupe les termes de même nature et on les additionne.

Exemple : Réduire l'expression suivante :

A = $3x^2 + 2x + 3 + x^2 + 5x + 7$
A = $3x^2 + x^2 + 2x + 5x + 3 + 7$
A = $4x^2 + 7x + 10$

2 – Réduire un produit.

Règle : Pour calculer un produit, on peut modifier l'ordre des facteurs.

Exemples :

$3x \times 4 = 3 \times 4 \times x = 12x$
$2a \times 5b = 2 \times 5 \times a \times b = 10ab$
$6y \times 3y = 6 \times 3 \times y \times y = 18y^2$

III – Distributivité.

Propriété : Quels que soient les nombres k, a et b, on a :

- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
- $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Remarques :

- On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction.
- Ces égalités peuvent se lire dans les deux sens.

1 – Développement d'une expression.

Définition : Développer signifie transformer un produit en une somme ou une différence.

Produit → Somme, différence

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

A = $4(3x + 1)$	B = $3x(5 - 2x)$
A = $4 \times 3x + 4 \times 1$	B = $3x \times 5 - 3x \times 2x$
A = $12x + 4$	B = $15x - 6x^2$

2 – Factorisation d'une expression.

Définition : Factoriser signifie transformer une somme ou une différence en un produit.

Somme, différence → Produit

$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$
$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$

On dit que k est un <u>facteur commun</u> aux termes $k \times a$ et $k \times b$, et que k est <u>mis en facteur</u>.

<u>Exemples</u> : Factoriser les expressions suivantes :

A = $2a + 2b$
A = $2(a + b)$

B = $2a - 3a^2$
B = $2a - 3a \times a$
B = $a(2 - 3a)$

IV – Calculer la valeur d'une expression littérale.

- Pour calculer la valeur d'une expression littérale pour une valeur de x donnée, on remplace x par cette valeur dans l'expression, sans oublier de rétablir les signes × sous-entendus, puis on applique les règles de priorités.

<u>Exemples</u> :

Calculer A = $2 + 3x$ pour $x = 2$

A = $2 + 3 \times 2$
A = $2 + 6$
A = 8

Calculer B = $2x^2 - 3x + 1$ pour $x = 3$

B = $2 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1$
B = $2 \times 9 - 9 + 1$
B = $18 - 9 + 1$
B = 10

V – Notion d'égalité.

1 – Définitions.

- Une égalité est constituée de deux membres séparés par un signe =.
- Soit une égalité A = B.
  - A est le membre de gauche ou le premier membre de l'égalité.
  - B est le membre de droite ou le second membre de l'égalité.
- Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même valeur.

<u>Exemples</u> :

$\left.\begin{array}{r} 3 + 5 = 4 \times 2 \\ 15 - 2 \times 3 = 9 \end{array}\right\}$ Dans chaque cas, les deux membres ont la même valeur.

2 – Tester si une égalité est vraie.

Pour tester si une égalité est vraie :

- on remplace la (ou les) lettre(s) par les nombres proposés,
- on calcule séparément chacun des membres de l'égalité.

Si les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vraie pour ces nombres.

Si les deux membres n'ont pas la même valeur, l'égalité $\left\{\begin{array}{c} \text{est fausse} \\ \text{n'est pas vraie} \end{array}\right\}$ pour ces nombres.

<u>Exemple 1</u> : l'égalité $2x + 3 = x + 8$ est-elle vraie pour $x = 5$?

- $2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$ (on calcule le membre de gauche)
- $5 + 8 = 13$ (on calcule le membre de droite)
- Donc l'égalité $2x + 3 = x + 8$ est vraie pour $x = 5$ (on conclut).

Exemple 2 : l'égalité $2x + 3 = x + 8$ est-elle vraie pour $x = 2$?

- $2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$ (on calcule le membre de gauche)
- $2 + 8 = 10$ (on calcule le membre de droite)
- $7 \neq 10$ donc l'égalité $2x + 3 = x + 8$ est fausse pour $x = 2$ (on conclut).

Vocabulaire :

Pour les deux exemples ci-dessus, on dit que x est une inconnue ou une variable.
Pour certaines valeurs de l'inconnue, l'égalité $2x + 3 = x + 8$ est fausse, pour d'autres valeurs, l'égalité est vraie.

VI – Equations.

Définitions :

1) Une équation est une égalité de deux expressions (appelées membres de l'équation) dans laquelle se trouve(nt) une (ou plusieurs) inconnue(s).
2) Une solution de l'équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.
3) Résoudre une équation c'est trouver toutes ses solutions.

Remarque : En 5$^{\text{ème}}$, on se contente de vérifier que des nombres sont ou non solutions d'équations.

Exemple : À l'exemple 1 du paragraphe précédent, on a établi que 5 est une solution de l'équation $2x + 3 = x + 8$.