# Chapitre 4 : Triangles.

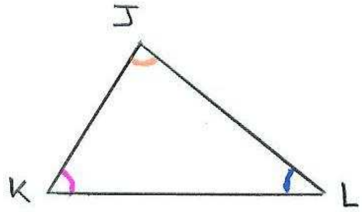
## I – Somme des angles d'un triangle.

### 1 – Propriété.

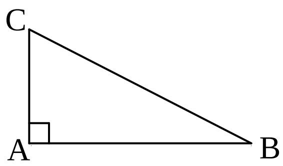
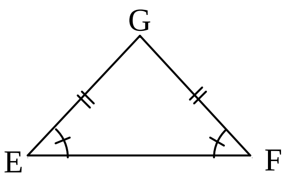
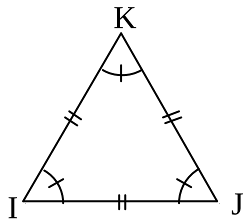
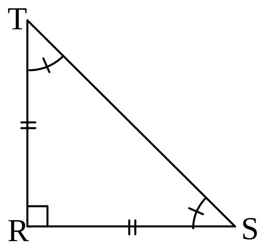
- La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Exemple :

Dans le triangle JKL,
on a $\widehat{JKL} + \widehat{JLK} + \widehat{LJK} = 180°$.




### 2 – Triangles particuliers.

| **Triangle rectangle** | **Triangle isocèle** | **Triangle équilatéral** | **Triangle rectangle isocèle** |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$<br>$\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires. | $\widehat{E} = \widehat{F} = \dfrac{180 - \widehat{G}}{2}$ | $\widehat{I} = \widehat{J} = \widehat{K} = \dfrac{180}{3} = 60°$ | $\widehat{S} = \widehat{T} = \dfrac{90}{2} = 45°$ |

## II – Inégalité triangulaire.

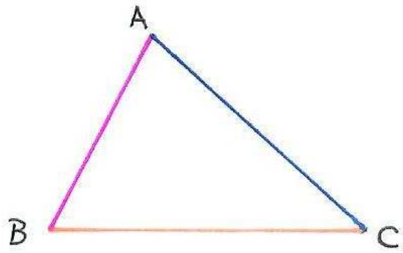
### 1 – Propriété.

- Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple :

Dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{cases} AB < AC + CB \\ AC < AB + BC \\ BC < BA + AC \end{cases}$$




Conséquence : Soient $a$, $b$ et $c$ trois longueurs données. $a$ est la plus grande des longueurs.

- Si $a < b + c$, alors on peut construire un triangle de côtés $a$, $b$ et $c$.
- Si $a > b + c$, alors on ne peut pas construire un triangle de côtés $a$, $b$ et $c$.

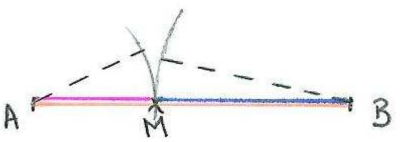
Exemple : Peut-on construire un triangle EDF sachant que ED = 1 cm, EF = 1,5 cm et DF = 3 cm ?

On compare la longueur du plus grand côté et la somme des longueurs des deux autres côtés :
ED + EF = 1 + 1,5 = 2,5 cm et DF = 3 cm. On a : DF > ED + EF.
L'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée, donc on ne peut pas construire un tel triangle.

### 2 – Cas d'égalité.

Propriété : Si trois points A, B et M sont tels que **AM** + **MB** = **AB**, alors le point M appartient au segment [AB].

Exemple :




AM = 1,5 cm, MB = 2,5 cm et AB = 4 cm.

Propriété réciproque : Si un point M appartient au segment [AB], alors AM + MB = AB.

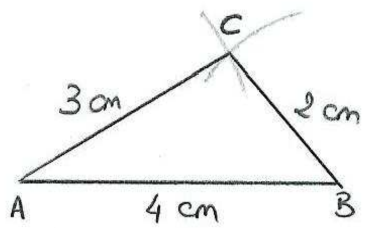
## III – Construction de triangles.

Dans les 3 cas ci-dessous, on peut construire un triangle avec les instruments de géométrie adéquat.

### 1 – On connaît la longueur des trois côtés du triangle.

Construire un triangle ABC tel que : AB = 4cm, BC = 2 cm et AC = 3 cm.

**Construction**




**Programme de construction**

**1)** On trace un segment [AB] de longueur 4 cm.

**2)** On trace un arc de cercle de centre B et de rayon 2 cm.

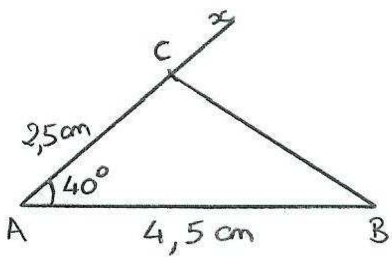
**3)** On trace un arc de cercle de centre A et de rayon 3 cm.

**4)** Le point C est l'intersection des deux arcs de cercle.

### 2 – On connaît la longueur de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ces côtés.

Construire un triangle ABC tel que : AB = 4,5 cm, AC = 2,5 cm et $\widehat{BAC}$ = 40°.

**Construction**




**Programme de construction**

**1)** On trace un segment [AB] de longueur 4,5 cm.

**2)** On trace une demi-droite [A$x$) tel que $\widehat{BAx}$ = 40°.

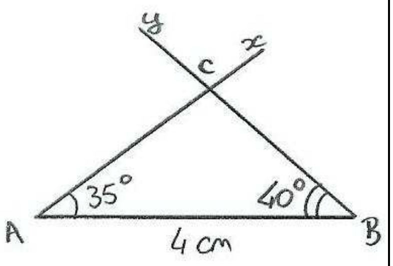
**3)** On trace le segment [AC] de longueur 2,5 cm.

**4)** On trace le segment [BC].

### 3 – On connaît la longueur d'un côté et la mesure des deux angles qui lui sont adjacents.

Construire un triangle ABC tel que : AB = 4 cm, $\widehat{BAC}$ = 35° et $\widehat{ABC}$ = 40°.

**Construction**




**Programme de construction**

**1)** On trace un segment [AB] de longueur 4 cm.

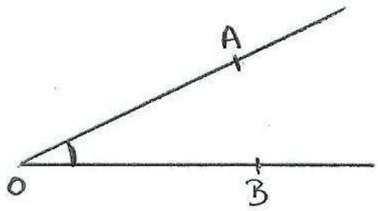
**2)** On trace une demi-droite [A$x$) tel que $\widehat{BAx}$ = 35°.

**3)** On trace une demi-droite [B$y$) tel que $\widehat{ABy}$ = 40°.

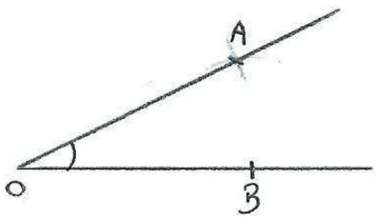
**4)** L'intersection des deux demi-droites est le point C.

### 4 – Reproduire un angle à la règle et au compas.

Reproduire l'angle $\widehat{AOB}$ avec la règle et le compas :




**Construction**




**Programme de construction**

Pour reproduire l'angle $\widehat{AOB}$ :

**1)** On reporte la longueur OB avec le compas et on trace le segment [OB].

**2)** On reporte les longueurs OA et AB avec le compas ; on obtient A à l'intersection des deux arcs de cercle.

**3)** On trace les demi-droites [OA) et [OB).

## IV – Médiatrices.

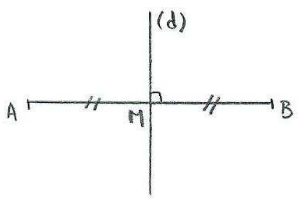
### 1 – Rappels.

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe en son milieu.

Construction de la médiatrice (d) d'un segment [AB] :

➢ *Avec la règle graduée et une équerre*

**Construction**

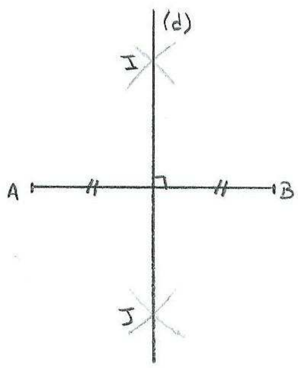



**Programme de construction**

**1)** Placer le milieu M du segment [AB].

**2)** Tracer la droite (d) perpendiculaire à [AB] qui passe par le point M.

➢ *Avec un compas et une règle*

| **Construction** | **Programme de construction** |
|---|---|
|  | **1)** Tracer un arc de cercle de centre A, le rayon étant plus grand que la moitié de AB.<br>**2)** En gardant le même rayon, tracer un arc de cercle de centre B ; les deux arcs de cercle se coupent en I et J.<br>**3)** Tracer la droite (IJ) : c'est la médiatrice de [AB]. |

Propriété : La médiatrice d'un segment est constituée de tous les points situés à égale distance des extrémités de ce segment.

Exemple : Soit (d) la médiatrice de [AB] :

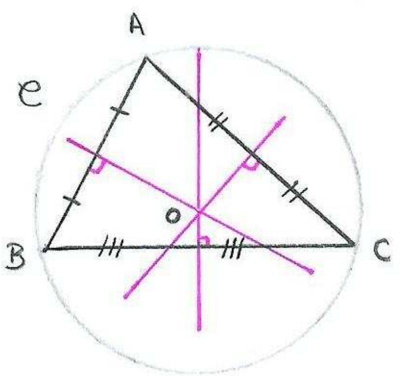
- Si M appartient à (d), alors MA = MB.
- Si MA = MB, alors M appartient à (d).

### 2 – Médiatrices d'un triangle.

Propriétés et définition :

- Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent en un même point : on dit qu'elles sont concourantes.
- Ce point commun est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle. On dit que ce cercle est le cercle circonscrit au triangle.

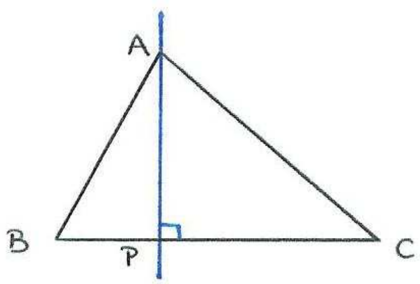
Exemple :




- O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
- $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

## V – Hauteurs d'un triangle.

Définition : Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé.



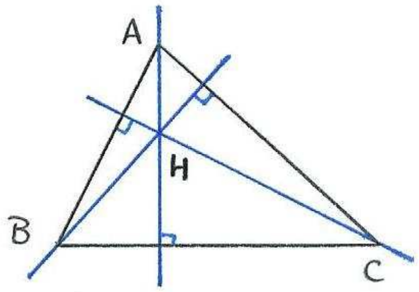

(AP) est la hauteur issue de A.

P est le pied de la hauteur issue de A.

Remarque : On appelle aussi hauteur le segment [AP] ou la longueur AP.

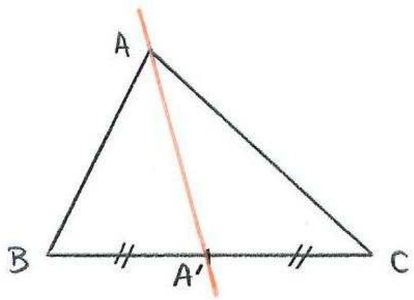
Propriété et définition : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H.
On dit que ce point commun H est l'orthocentre du triangle.

Exemple : H est l'orthocentre du triangle ABC.




## VI – Médianes d'un triangle.

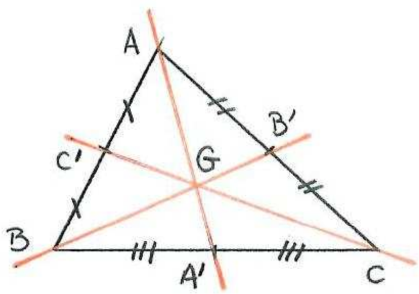
Définition : Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.




(AA') est la médiane issue de A.

Propriété et définition : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G.
On dit que ce point commun G est le centre de gravité du triangle.

Exemple : G est le centre de gravité du triangle ABC.

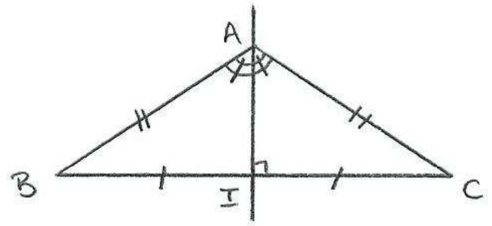



## VII – Droites remarquables et triangles particuliers.

### 1 – Triangle isocèle.

Propriété : Si un triangle est isocèle, alors la médiane, la hauteur et la bissectrice issues du sommet principal et la médiatrice relative à la base sont des droites confondues.

Exemple :

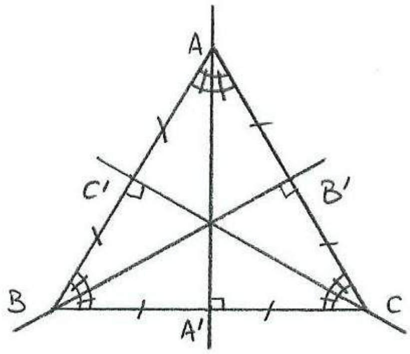



(AI) est à la fois médiatrice, bissectrice, hauteur et médiane du triangle ABC isocèle en A.

### 2 – Triangle équilatéral.

Propriété : Si un triangle est équilatéral, alors la médiane, la hauteur et la bissectrice issues d'un même sommet et la médiatrice du côté opposé sont des droites confondues.

Exemple :




(CC') est à la fois hauteur, bissectrice, médiane et médiatrice du triangle équilatéral ABC.
Il en est de même pour (AA') et (BB').