Chapitre 5 : Nombres en écriture fractionnaire.

I – Sens de l'écriture fractionnaire.

1 – Définitions.

- Soient a et b deux nombres décimaux, avec $b \neq 0$.

Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

Ce quotient se note $a \div b$ ou, en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$.

- Lorsque a et b sont des nombres entiers, l'écriture $\frac{a}{b}$ est appelée une fraction.
- Dans tous les cas, a est appelé le numérateur et b le dénominateur (jamais égal à zéro).

Remarque : La valeur exacte d'un quotient peut toujours se noter en écriture fractionnaire. Elle ne peut se noter en écriture décimale que lorsque la division se termine.

Exemples :

❖ Le quotient de 13 par 8 peut s'écrire $\frac{13}{8}$.

On a $\frac{13}{8} \times 8 = 13$.

Ici, ce quotient peut aussi s'écrire 1,625.

$\frac{13}{8}$ et 1,625 sont deux écritures différentes d'un même nombre.

❖ Le quotient de 15 par 7 peut s'écrire $\frac{15}{7}$.

On a $\frac{15}{7} \times 7 = 15$.

$\frac{15}{7}$ n'a pas d'écriture décimale car la division de 15 par 7 « ne s'arrête pas ».

On a seulement $15 \div 7 \approx 2{,}14$, mais

$2{,}14 \times 7 = 14{,}98 \neq 15$.

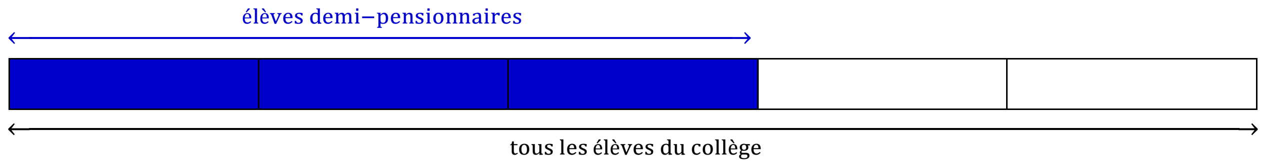
2 – Notion de proportion.

Exemple :

Trois cinquièmes des élèves du collège sont demi-pensionnaires.

On dit que la proportion d'élèves demi-pensionnaires est $\frac{3}{5}$.

Cela signifie que, sur 5 élèves du collège, 3 sont demi-pensionnaires.



On peut en déduire, par exemple, que si le collège a 450 élèves, le nombre de demi-pensionnaires est 270. En effet : $\frac{3}{5} \times 450 = 270$.

II – Égalité de quotients.

1 – Propriété des quotients.

Propriété : La valeur d'une écriture fractionnaire ne change pas lorsque l'on multiplie ou l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

En écriture littérale : lorsque a, b et k désignent des nombres décimaux, avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$:

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

Exemples : $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$; $\frac{16}{10} = \frac{16 \div 2}{10 \div 2} = \frac{8}{5}$; $\frac{25}{45} = \frac{5 \times 5}{9 \times 5} = \frac{5}{9}$

2 – Simplification de fractions.

Définition : Simplifier une fraction signifie écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Exemples :

- $\frac{21}{35} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{3}{5}$
- $\frac{24}{16} = \frac{3 \times 8}{2 \times 8} = \frac{3}{2}$
- $\frac{42}{56} = \frac{3 \times 14}{4 \times 14} = \frac{3}{4}$

ou bien $\frac{42}{56} = \frac{21 \times 2}{28 \times 2} = \frac{21}{28} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{3}{4}$

Pour simplifier une fraction, on cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur et si on peut on cherche le plus grand diviseur commun (PGCD).

Remarque : On cherche à obtenir une fraction avec une écriture la plus simple possible. Lorsque la fraction trouvée n'admet plus de simplifications, on dit qu'il s'agit d'une fraction irréductible.

3 – Division de deux nombres décimaux.

Propriété : Pour diviser deux nombres décimaux :

- on rend entier son diviseur en le multipliant par 10 ou 100 ou 1000 … ; on doit multiplier son dividende, comme son diviseur, par 10 ou 100 ou 1000 … ;
- on effectue la division obtenue.

Exemples :

- $28 \div 0{,}7 = \frac{28}{0{,}7} = \frac{28 \times 10}{0{,}7 \times 10} = \frac{280}{7} = 280 \div 7 = 40.$
- $7{,}35 \div 0{,}3 = \frac{7{,}35}{0{,}3} = \frac{7{,}35 \times 10}{0{,}3 \times 10} = \frac{73{,}5}{3} = 73{,}5 \div 3 = 24{,}5.$

III – Comparaison de nombres en écriture fractionnaire.

1 – Les dénominateurs sont les mêmes.

Propriété : Deux nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur sont rangés dans l'ordre de leurs numérateurs. Si $a < b$ et $c \neq 0$, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Exemple : $\frac{10{,}3}{62} < \frac{10{,}4}{62}$, car le dénominateur est le même : 62 et 10,3 < 10,4.

2 – Les numérateurs sont les mêmes.

Propriété : Deux nombres en écriture fractionnaire ayant le même numérateur sont rangés dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs. Si $a < b$ et $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, alors $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$.

Exemple : $\frac{5}{13} < \frac{5}{9}$, car le numérateur est le même : 5 et 13 > 9.

3 – Comparer une écriture fractionnaire au nombre 1.

Propriétés :

- Si le numérateur est égal au dénominateur, alors l'écriture fractionnaire est égale à 1 :
  Si $a = b \neq 0$, alors $\frac{a}{b} = 1$
- Si le numérateur est inférieur au dénominateur, alors l'écriture fractionnaire est inférieure à 1 :
  Si $a < b$ et $b \neq 0$, alors $\frac{a}{b} < 1$

➢ Si le numérateur est supérieur au dénominateur, alors l'écriture fractionnaire est supérieure à 1 :
Si $a > b$ et $b \neq 0$, alors $\frac{a}{b} > 1$

Exemples : $\frac{8}{8} = 1$; $\frac{2}{3} < 1$; $\frac{6}{5} > 1$

4 – Étude d'un autre cas : les dénominateurs sont différents.

Remarque : Lorsque les dénominateurs sont différents, on se limite en $5^{\text{ème}}$ au cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.

Propriété : Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on peut les réduire au même dénominateur.

Exemple : Comparer les fractions $\frac{5}{3}$ et $\frac{19}{12}$.

- On commence par les réduire au même dénominateur : $\frac{5}{3} = \frac{5 \times 4}{3 \times 4} = \frac{20}{12}$.
- Les fractions $\frac{19}{12}$ et $\frac{20}{12}$ ayant le même dénominateur, on peut les comparer :
  19   20, donc $\frac{19}{12} < \frac{20}{12}$. On en déduit que $\frac{19}{12} < \frac{5}{3}$.

IV – Addition et soustraction de deux nombres en écriture fractionnaire.

1 – Les dénominateurs sont les mêmes.

Propriété : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur :

- on additionne (ou on soustrait) les deux numérateurs,
- on garde le dénominateur commun.

Si a, b et c représentent trois nombres décimaux, avec $c \neq 0$ et $a > b$:

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemples : $\frac{10}{3} + \frac{7}{3} = \frac{10+7}{3} = \frac{17}{3}$ et $\frac{8}{9} - \frac{7}{9} = \frac{8-7}{9} = \frac{1}{9}$

2 – Un dénominateur est multiple de l'autre.

Propriété : Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on doit d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemples :

❖ On veut additionner $\frac{3}{8}$ et $\frac{7}{2}$. On remarque que 8 est un multiple de 2.

On a alors $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 4}{2 \times 4} = \frac{28}{8}$. Donc, $\frac{3}{8} + \frac{7}{2} = \frac{3}{8} + \frac{28}{8} = \frac{3+28}{8} = \frac{31}{8}$.

❖ On veut soustraire $\frac{31}{15}$ et $\frac{3}{5}$. On remarque que 15 est un multiple de 5.

On a alors $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$. Donc, $\frac{31}{15} - \frac{3}{5} = \frac{31}{15} - \frac{9}{15} = \frac{31-9}{15} = \frac{22}{15}$.

Remarque : Pour additionner (ou soustraire) un nombre décimal et un nombre en écriture fractionnaire, on écrire le nombre décimal sous forme fractionnaire.

Si a, b et c représentent trois nombres décimaux, avec $c \neq 0$ et $a > b$:

$a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c}$ et $a - \frac{b}{c} = \frac{a}{1} - \frac{b}{c}$

Exemples :

❖ $3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{3\times 5}{1\times 5}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}$

❖ $10-\frac{1}{2}=\frac{10}{1}-\frac{1}{2}=\frac{10\times 2}{1\times 2}-\frac{1}{2}=\frac{20}{2}-\frac{1}{2}=\frac{20-1}{2}=\frac{19}{2}$

V – Multiplication de deux nombres en écriture fractionnaire.

Propriété : Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire :

- on multiplie les numérateurs entre eux,
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

Si a, b, c et d représentent quatre nombres décimaux, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

Exemples :

❖ $\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times 7}{5\times 8}=\frac{21}{40}$

❖ $\frac{2{,}1}{4}\times\frac{3}{1{,}7}=\frac{2{,}1\times 3}{4\times 1{,}7}=\frac{6{,}3}{6{,}8}$

Il vaut mieux simplifier avant de multiplier.

❖ $\frac{4}{15}\times\frac{15}{7}=\frac{4\times 15}{15\times 7}=\frac{60}{105}=\frac{5\times 12}{5\times 21}=\frac{12}{21}=\frac{3\times 4}{3\times 7}=\frac{4}{7}$

Mais il y a plus simple ! $\frac{4}{15}\times\frac{15}{7}=\frac{4\times 15}{15\times 7}=\frac{4}{7}$

❖ $\frac{8}{35}\times\frac{7}{12}=\frac{8\times 7}{35\times 12}=\frac{4\times 2\times 7}{7\times 5\times 3\times 4}=\frac{2}{5\times 3}=\frac{2}{15}$

↳ On a divisé le numérateur et le dénominateur par 4 et 7.

1 – Calculer une proportion.

Propriété : Pour prendre une fraction d'un nombre, on multiplie le nombre par la fraction.

Si a, b et c représentent trois nombres décimaux, avec $c \neq 0$: $a\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{c}$

Exemples :

❖ Voir l'exemple du paragraphe I – 2.

❖ $7\times\frac{3}{5}=\frac{7\times 3}{5}=\frac{21}{5}$

❖ $8\times\frac{2}{3}=\frac{8\times 2}{3}=\frac{16}{3}$

2 – Prendre une fraction d'une grandeur.

Propriété : Pour prendre une fraction d'une grandeur, on multiplie cette fraction par cette grandeur.

Exemple :

J'ai mangé les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ d'une pizza. Finalement, quelle fraction de la pizza ai-je mangé ?

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times 3}{3\times 4}=\frac{2}{4}=\frac{2\times 1}{2\times 2}=\frac{1}{2}$, finalement j'en ai mangé la moitié.