Chapitre 7 : Géométrie dans l'espace.

I – Rappels.

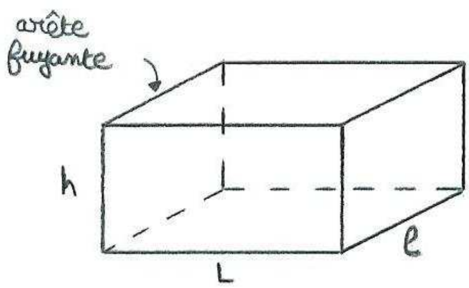
1 – Parallélépipède rectangle et cube.

Définitions :

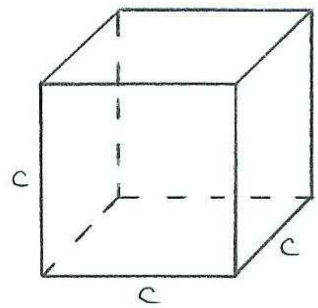
- Un parallélépipède rectangle, ou pavé droit, est un solide ayant 6 faces rectangulaires.
- Un cube est un parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont carrées.

Exemples :

Parallélépipède rectangle :



Cube :



Remarque : La perspective cavalière ne respecte pas toutes les longueurs et toutes les mesures d'angles mais elle respecte le parallélisme.

Volumes :

- Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur l et de hauteur h est : $V = L \times l \times h$.
- Le volume d'un cube de côté c est : $V = c \times c \times c = c^3$.

Patrons :

a) Tracer un patron d'un parallélépipède rectangle de longueur 3 cm, de largeur 2,5 cm et de hauteur 1,5 cm.

b) Tracer un patron d'un cube de côté 2,5 cm.

2 – Unités de volume.

a) Unités de volume.

1 mètre cube (noté m^3), est le volume d'un cube d'arête 1 m.

kilomètre cube			hectomètre cube			décamètre cube			mètre cube			décimètre cube			centimètre cube			millimètre cube		
km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											1	0	0	0						
																	0,	0	3	0
											0,	0	0	0,	8					
																	1,	2	0	0

Exemples :

1 m^3 = 1 000 dm^3 ; 30 mm^3 = 0,03 cm^3 ; 0,8 dm^3 = 0,000 8 m^3 ; 1,2 cm^3 = 1 200 mm^3.

b) Unités de capacité.

Le litre (noté L), est une unité de capacité telle que 1 L = 1 dm^3.

kilolitre	hectolitre	décalitre	litre	décilitre	centilitre	millilitre
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
			4,	2	0	
		0,	0	3,	8	
			0,	0	0	6

Exemples :
4,2 L = 420 cL ; 3,8 dL = 0,038 daL ; 0,006 L = 6 mL.

c) Passage des unités de volume aux unités de capacité.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
													3	4						
															3,	5	0			
											1	0	0	0						

Exemples :
34 dm^3 = 34 L ; 350 cm^3 = 3,5 dL ; 1 m^3 = 1 000 L.

II – Prisme droit.

1 – Description.

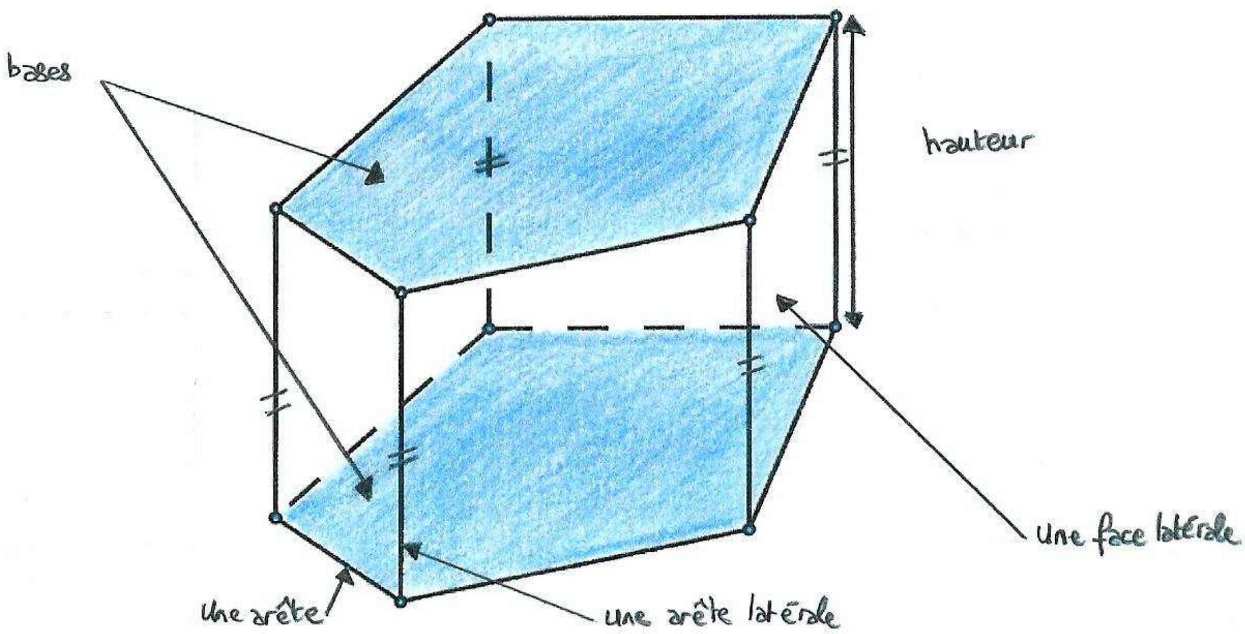
Définition : Un prisme droit est un solide dont :

- deux faces, appelées bases, sont des polygones superposables et parallèles ;
- les autres faces, appelées faces latérales, sont des rectangles (il y en a autant que de côtés d'une base).

Définitions :

- Les arêtes qui relient les deux bases sont les arêtes latérales.
- La longueur commune de ces arêtes latérales est la hauteur du prisme droit.

Exemple : Prisme droit à base pentagonale.



Remarque : Si les bases sont des rectangles, le prisme droit est un parallélépipède rectangle.

2 – Perspective cavalière.

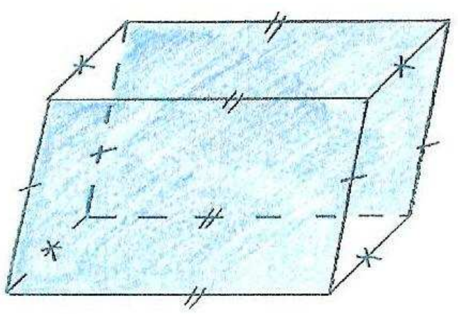
Pour représenter un prisme droit, on peut utiliser une perspective cavalière :

- les arêtes d'une base sont parallèles à celles de l'autre base et de même longueur ;
- les arêtes latérales sont toutes parallèles et de même longueur ;
- les arêtes cachées sont représentées en pointillés.

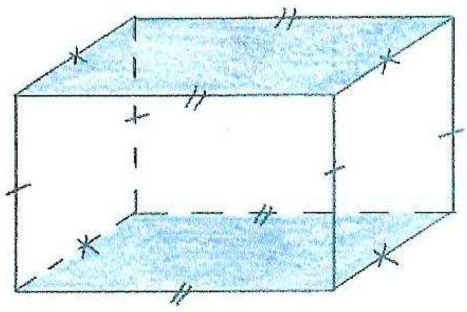
Exemples :

➢ Prisme droit dont la base est un parallélogramme.

Une base est vue de face

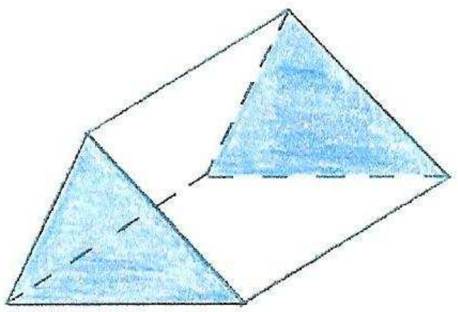


Aucune base n'est vue de face

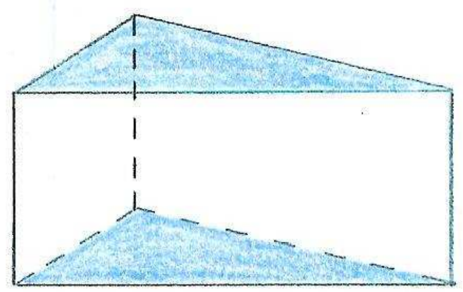


➢ Prisme droit dont la base est un triangle.

Une base est vue de face



Aucune base n'est vue de face



Remarque : Les faces latérales sont des rectangles dans la réalité, mais en perspective elles sont représentées par des parallélogrammes.

3 – Patron.

- Un patron d'un solide est un dessin qui permet après découpage et pliage de fabriquer ce solide. Chaque face est en vraie grandeur.
- On obtient un patron d'un prisme droit en mettant à plat l'ensemble de ses faces.

a) Programme de construction d'un patron d'un prisme droit.

1) Compter le nombre total de faces (faces latérales et bases) du prisme.
2) Tracer une face latérale et y rattacher les deux bases.
3) À partir des bases, reporter au compas les longueurs des autres faces latérales.

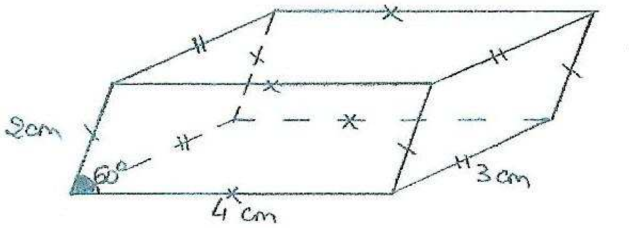
Remarques :

- Il y a plusieurs patrons possibles pour un même prisme.
- Avant de tracer le patron au propre, il est judicieux d'en tracer un à main levée au brouillon.

b) Construction d'un patron d'un prisme droit.

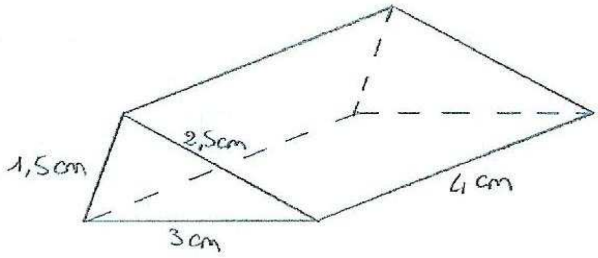
➢ La base est un parallélogramme.

Construire en vraie grandeur un patron du prisme droit ci-dessous.



- <u>La base est un triangle.</u>

Construire en vraie grandeur un patron du prisme droit ci-dessous.



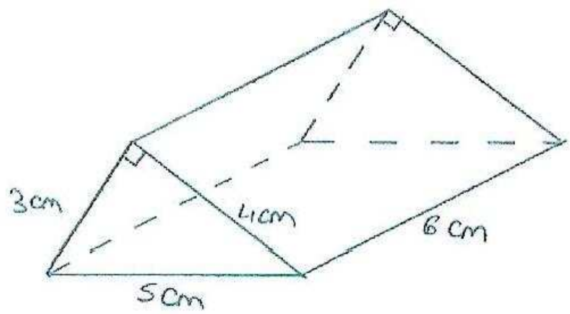
4 – Aire et volume d'un prisme droit.

a) Aire.

<u>Définitions</u> :

- L'<u>aire latérale d'un prisme droit</u> est égale au produit du périmètre d'une base par la hauteur.
- L'<u>aire totale d'un prisme droit</u> est égale à la somme de l'aire latérale et du double de l'aire d'une base.

<u>Exemple</u> : Calculer l'aire latérale, l'aire d'une base puis l'aire totale du prisme droit ci-dessous.



La base de ce prisme droit est un triangle rectangle.

- Périmètre de la base : 3 + 4 + 5 = 12 cm.
- Aire latérale : 12 × 6 = 72 cm².
- Aire d'une base : $\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2}$ = 6 cm².
- Aire totale : 72 + 2 × 6 = 72 + 12 = 84 cm².

b) Volume.

<u>Définition</u> :

Le volume $\mathbf{V}$ d'un prisme droit d'aire de base $\boldsymbol{B}$ et de hauteur $\boldsymbol{h}$ est : $\mathbf{V} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{h}$.

<u>Exemple</u> : Dans l'exemple précédent, $\boldsymbol{B}$ = 6 cm² et $\boldsymbol{h}$ = 6 cm.
Donc, on a : $\mathbf{V}$ = 6 × 6 = 36 cm^3.

III – Cylindre de révolution.

1 – Description.

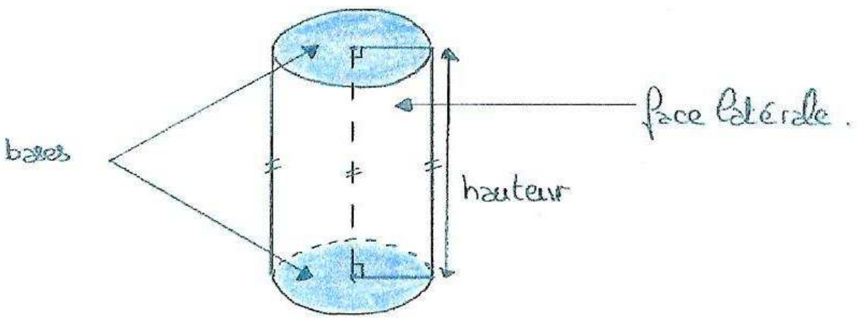
Définition : Un cylindre de révolution est un solide décrit par un rectangle qui tourne autour de l'un de ses côtés. Il est formé :

- de deux faces parallèles, appelées bases, qui sont des disques de même rayon ;
- d'une surface courbe, appelée face latérale, qui a pour patron un rectangle.

Définitions :

- La hauteur d'un cylindre de révolution est la longueur d'un segment reliant perpendiculairement les deux bases.
- L'axe du cylindre est la droite qui relie les centres des disques de bases.
  (L'axe du cylindre est une hauteur du cylindre de révolution.)

Exemple :



2 – Perspective cavalière.

➢ Si une base est vue de face :

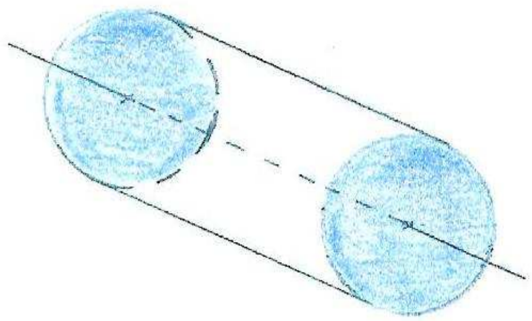
- les disques de bases sont représentés par des disques : ils sont en vraie grandeur.
- on joint les deux bases par des segments parallèles à la droite qui passe par les centres des deux bases et dont la longueur est égale à la distance entre les deux centres : la hauteur n'est pas en vraie grandeur.

➢ Si aucune base n'est vue de face :

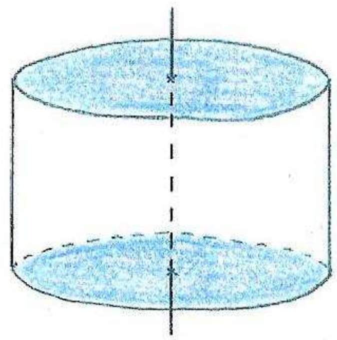
- les disques de bases sont représentés par des ovales : ils ne sont pas en vraie grandeur.
- on joint les deux bases par des segments parallèles à la droite qui passe par les centres des deux bases et dont la longueur est égale à la distance entre les deux centres : la hauteur est en vraie grandeur.

Exemples :

Une base est vue de face



Aucune base n'est vue de face



3 – Patron.

Un patron d'un cylindre de révolution est formé de deux disques superposables et d'un rectangle dont les dimensions sont :

- la hauteur du cylindre ;
- le périmètre d'un disque de base.

a) Programme de construction d'un patron d'un cylindre de révolution.

1) Calculer le périmètre du disque de base.
2) Tracer un rectangle de dimensions : le périmètre du disque de base, et la hauteur du cylindre.
3) Pour tracer les deux disques, à l'extérieur du rectangle :

- ➢ Choisir les côtés ayant pour longueur le périmètre du disque de base.
- ➢ Sur chacun de ces côtés, tracer un rayon du disque perpendiculaire à ce côté.
- ➢ Tracer, à partir de ces rayons, les deux cercles extérieurs au rectangle.

b) Construction d'un patron d'un cylindre de révolution.

Construire un patron d'un cylindre de révolution de 7 cm de hauteur et de 4 cm de diamètre.

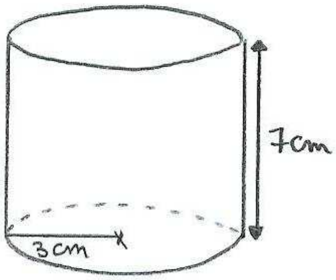
4 – Aire et volume d'un cylindre de révolution.

a) Aire.

Définitions :

- L'aire latérale d'un cylindre de révolution est égale au produit du périmètre d'une base par la hauteur.
- L'aire totale d'un cylindre de révolution est égale à la somme de l'aire latérale et du double de l'aire d'une base.

Exemple :
Calculer l'aire latérale, l'aire d'une base puis l'aire totale du cylindre de révolution ci-dessous.



- Périmètre de la base : $2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 3 = 6\pi$.
- Aire latérale : $6\pi \times 7 = 42\pi \approx 132$ cm².
- Aire d'une base : $\pi \times 3^2 = 9\pi$.
- Aire totale : $42\pi + 2 \times 9\pi = 42\pi + 18\pi = 60\pi \approx 188,5$ cm².

b) Volume.

Définition :
Le volume $\mathbf{V}$ d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h est : $\mathbf{V} = \pi \times r^2 \times h$.

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a : $\mathbf{V} = \pi \times 3^2 \times 7 = \pi \times 9 \times 7 = 63\,\pi \approx 198$ cm³.

Remarque : On a en fait $\mathbf{V} = B \times h$ où $B = \pi \times r^2$ est l'aire d'une base.
On remarque ainsi une analogie avec le volume d'un prisme droit.