Chapitre 8 : Les nombres relatifs.

I – Notion de nombre relatif.

1 – Utilisation des nombres relatifs.

Les nombres relatifs permettent de donner une réponse à toutes les soustractions de nombres décimaux. (Les nombres décimaux vus jusqu'à présent sont les nombres relatifs positifs).

Exemple 1 : Les nombres relatifs positifs.
11 – 8 = 3 (3 est le nombre qui ajouté à 8 donne 11).
On dit que 3 est un nombre relatif positif, on peut aussi le noter + 3 ; son signe est +.

Exemple 2 : Les nombres relatifs négatifs.
7 – 9 = – 2 (– 2 est le nombre qui ajouté à 9 donne 7).
On dit que – 2 est un nombre relatif négatif ; son signe est –.

2 – Définitions.

a) Les nombres relatifs sont constitués des nombres positifs et des nombres négatifs.

b) Les nombres négatifs sont toujours notés avec le signe –. Ils sont plus petits que zéro.

c) Les nombres positifs sont notés avec le signe + ou sans signe. Ils sont plus grands que zéro.

Remarques :
- Le nombre 0 est le seul nombre à la fois positif et négatif : 0 = + 0 = – 0.
- Les nombres relatifs qui sont entiers sont appelés : les entiers relatifs.

Exemples :
- + 3 ; 0 ; 6,3 sont des nombres positifs.
- – 5 ; 0 ; – 3,2 sont des nombres négatifs.
- – 5 ; 0 ; + 3 sont des entiers relatifs.
- + 3 ; 0 ; 6,3 ; – 5 ; – 3,2 sont des nombres relatifs.

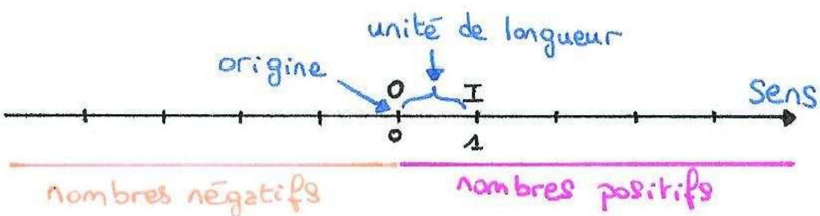
II – Repérage.

1 – Sur une droite graduée.

a) Droite graduée.

Définition : Une droite graduée est une droite sur laquelle on a fixé :
- un point appelé origine, repéré par zéro ;
- un sens de parcours : de la gauche vers la droite ;
- une unité de longueur reportée régulièrement.

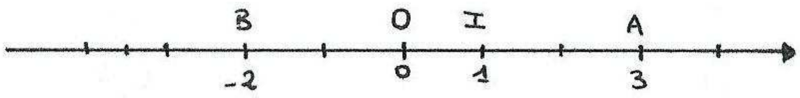
Exemple :



b) Abscisse d'un point.

Définition : Sur une droite graduée, chaque point est repéré par un nombre relatif unique appelé l'abscisse du point.

Exemple :

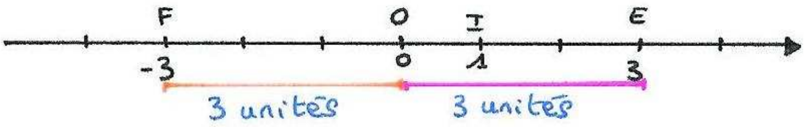


Sur la droite graduée ci-dessus :

- L'abscisse du point *A* est 3 ; on note *A*(3).
- (– 2) est l'abscisse du point *B*.
- Placer les points *C*(– 3,5) et *D*(4).

c) Distance à zéro.

Exemple :



Sur la droite graduée ci-dessus :

- Le point *E* a pour abscisse (+ 3).

La distance à zéro du nombre (+ 3) est la longueur du segment [*OE*], c'est-à-dire 3.

- Le point *F* a pour abscisse (– 3).

La distance à zéro du nombre (– 3) est la longueur du segment [*OF*], c'est-à-dire 3.

d) Nombres opposés.

Définition : Deux nombres relatifs qui ont la même distance à zéro et des signes contraires sont des nombres relatifs opposés.

Exemple : Les nombres relatifs (+ 3) et (– 3) sont des nombres relatifs opposés.
On dit aussi que (– 3) est l'opposé de (+ 3) ou que (+ 3) est l'opposé de (– 3).

Remarques :

- ❖ L'opposé d'un nombre positif est négatif ; l'opposé d'un nombre négatif est positif.
- ❖ L'opposé de 0 est 0.
- ❖ Sur une droite graduée, deux points symétriques par rapport à l'origine ont des abscisses opposées.

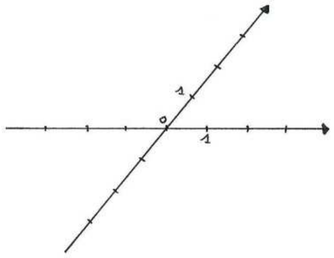
2 – Dans le plan.

a) Repère orthogonal du plan.

Définitions :

- ➢ Un repère du plan est formé de deux droites graduées sécantes de même origine (le point d'intersection des deux droites).

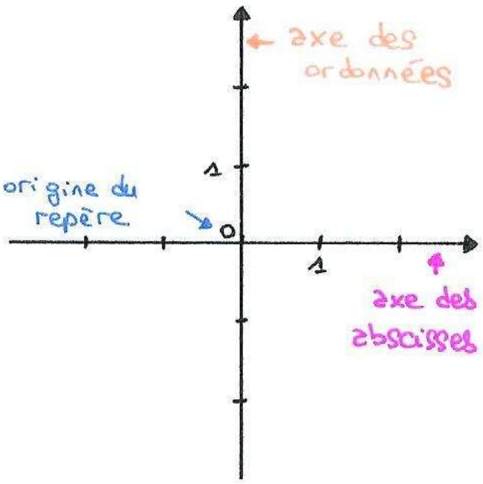
Exemple :



- Lorsque les deux droites sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.

La droite « horizontale », graduée de la gauche vers la droite, est appelée l'axe des abscisses.
La droite « verticale », graduée de bas en haut, est appelée l'axe des ordonnées.

Exemple :

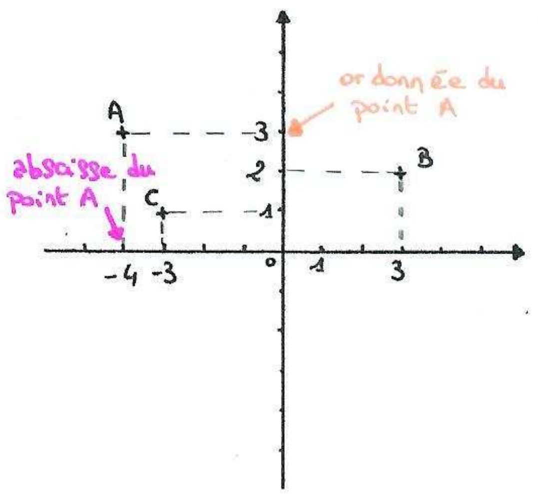


Remarque : Les deux axes ont la même origine, mais pas nécessairement la même unité de longueur.

b) Coordonnées d'un point.

Définition : Dans un repère du plan, chaque point est repéré par deux nombres relatifs appelés les coordonnées du point.
La première coordonnée, lue sur l'axe des abscisses, s'appelle l'abscisse du point.
La seconde coordonnée, lue sur l'axe des ordonnées, s'appelle l'ordonnée du point.

Exemple :



Dans ce repère, le point A a pour **abscisse** – 4 et pour **ordonnée** + 3.

Ses coordonnées sont (**– 4** ; **+ 3**).

On note A(– 4 ; + 3).

Les coordonnées des autres points sont : O(0 ; 0), B(3 ; 2) et C(– 3 ; 1).

Placer les points D(– 5 ; – 2) et E(1 ; – 3).

Pour placer le point D(– 5 ; – 2) :

1) *On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par la graduation – 5 de l'axe des abscisses.*
2) *On trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par la graduation – 2 de l'axe des ordonnées.*
3) *On marque le point D au point d'intersection de ces deux droites.*

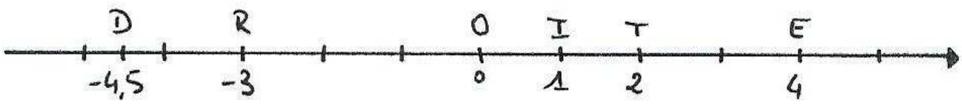
Attention :
L'ordre des coordonnées est important. C(– 3 ; 1) et E(1 ; – 3) sont des points différents.

III – Comparaison de deux nombres relatifs.

1 – À l'aide de la droite graduée.

Propriété : Si, en parcourant une droite graduée dans le sens indiqué par la flèche, on rencontre un point *A* avant un point *B*, alors l'abscisse du point *A* est inférieure à l'abscisse du point *B*.

Exemple :



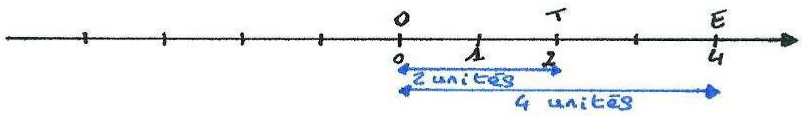
On rencontre *D* avant *R*, puis *R* avant *O*, et ainsi de suite ; donc, le rangement de leurs abscisses dans l'ordre croissant est : – 4,5 < – 3 < 0 < 1 < 2 < 4.

2 – D'après les signes et distances à zéro.

a) Comparaison de deux nombres positifs.

Propriété : Si deux nombres sont positifs, alors le plus petit est celui qui est le plus près de zéro. On dit que c'est celui qui a la plus petite distance à zéro.

Exemple :

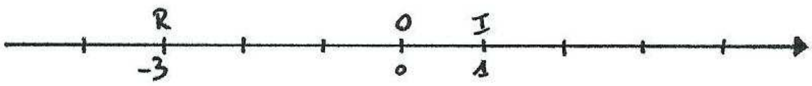


On a donc 2 < 4.

b) Comparaison d'un nombre positif et d'un nombre négatif.

Propriété : Tout nombre négatif est inférieur à tout nombre positif. (sauf zéro qui est à la fois positif et négatif).

Exemple :

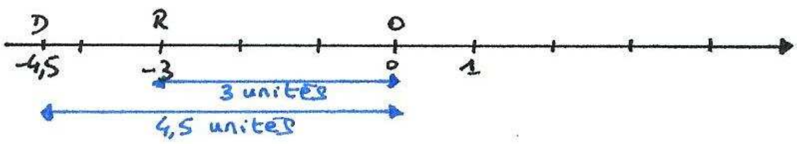


– 3 est négatif, 1 est positif. On a donc – 3 < 1.

c) Comparaison de deux nombres négatifs.

Propriété : Si deux nombres sont négatifs, alors le plus petit est celui qui est le plus éloigné de zéro. On dit que c'est celui qui a la plus grande distance à zéro.

Exemple :



On a donc – 4,5 < – 3.

3 – Méthode pour ranger une liste de nombres relatifs.

Ranger par ordre croissant les nombres : – 2,6 ; 3,4 ; – 2 ; 1 ; – 4,8 ; 3,19.

a) On trie les nombres positifs ; et les nombres négatifs : 3,4 ; 1 ; 3,19 et – 2,6 ; – 2 ; – 4,8.

b) On range les nombres positifs par ordre croissant : 1 < 3,19 < 3,4.

c) On range les nombres négatifs par ordre croissant : – 4,8 < – 2,6 < – 2.

d) On conclut : – 4,8 < – 2,6 < – 2 < 1 < 3,19 < 3,4.

IV – Somme de deux nombres relatifs.

1 – Les deux nombres sont de même signe.

Règle : Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :

- on garde le signe commun aux deux nombres ;
- on additionne les distances à zéro.

Exemples : A = (+ 5) + (+ 3,2) = + 8,2 et B = (– 2,7) + (– 4,1) = – 6,8.

2 – Les deux nombres sont de signes contraires.

Règle : Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires :

- on garde le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
- on soustrait les distances à zéro.

Exemples : C = (– 15) + (+ 37) = + 22 et D = (+ 22) + (– 38) = – 16.

3 – Les deux nombres sont opposés.

Règle : La somme de deux nombres relatifs opposés est égale à zéro.

Exemples : E = (+ 7) + (– 7) = 0 et F = (– 83) + (+ 83) = 0.

4 – Méthode pour additionner plusieurs nombres relatifs.

Calculer le nombre G = (+ 13) + (– 6) + (– 25) + (+ 6) + (+ 31) + (– 7).

a) On repère les nombres opposés et on les barre (leur somme est égale à 0) :
G = (+ 13) + ~~(– 6)~~ + (– 25) + ~~(+ 6)~~ + (+ 31) + (– 7).

b) On regroupe les nombres relatifs qui ont le même signe : G = (+ 13) + (+ 31) + (– 25) + (– 7).

c) On ajoute les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux : G = (+ 44) + (– 32).

d) On termine le calcul : G = + 12.

Exercice :
En utilisant la méthode pour additionner plusieurs nombres relatifs, calculer les nombres :
H = (+ 21) + (– 7) + (– 10) + (+ 9) + (+ 10) + (– 4) ;
I = (– 23) + (+ 15) + (+ 8) + (– 3) + (– 15) + (+ 9).

H =	I =
H =	I =
H =	I =
H =	I =

V – Différence de deux nombres relatifs.

1 – Soustraire un nombre relatif.

Règle : Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

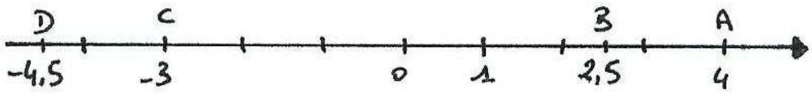
Exemples : $J = (-5) - (+18) = (-5) + (-18) = -23$ et $K = (-7) - (-19) = (-7) + (+19) = +12$.

Remarque : a et b désignent deux nombres relatifs, on a : $a - b = a + (-b)$ [$-b$ est l'opposé de b].

2 – Distance de deux points sur une droite graduée.

Règle : Sur une droite graduée, la distance de deux points d'abscisses données est égale à la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite.

Exemples :



Soient $A(4)$; $B(2,5)$; $C(-3)$ et $D(-4,5)$.
Comme $4 > 2,5$, la distance AB est égale à la différence entre l'abscisse du point A et l'abscisse du point B. Donc $AB = 4 - 2,5 = 1,5$.
De même, $BC = 2,5 - (-3) = 2,5 + (+3) = 5,5$ et $CD = -3 - (-4,5) = -3 + (+4,5) = 1,5$.

Remarques :

- La distance de deux points est toujours un nombre positif (c'est une longueur).
- La distance de deux points A et B se note indifféremment AB ou BA.

VI – Calcul d'une expression algébrique.

1 – Somme algébrique.

Définition : Une somme algébrique est une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs.

Règles :

- Pour calculer une somme algébrique, on remplace chaque soustraction par l'addition de l'opposé.
- Lorsqu'il ne reste que des additions dans l'expression, on peut modifier l'ordre des termes puis les regrouper, sans que cela ne change leur somme.

Exemples :

$L = (+17) - (+3) + (+5) - (-4)$	$M = (+4) + (-1) - (-2) - (+7)$
$L = (+17) + (-3) + (+5) + (+4)$	$M = (+4) + (-1) + (+2) + (-7)$
$L = (+17) + (+5) + (+4) + (-3)$	$M = (+4) + (+2) + (-1) + (-7)$
$L = (+26) + (-3)$	$M = (+6) + (-8)$
$L = 23$	$M = -2$

2 – Simplification d'écriture.

Règle : Dans une somme algébrique, on simplifie les écritures en écrivant les nombres relatifs sans le signe + et sans les parenthèses et en écrivant le premier terme sans parenthèses.

Exemples : $(-5) + (+3) = -5 + 3 = -2$ et $(+2) + (-7) = 2 + (-7) = -5$.

Remarque :
Simplifions l'écriture (+ 2) – (+ 5) :

- (+ 2) – (+ 5) = (+ 2) + (– 5) = 2 + (– 5)
- (+ 2) – (+ 5) = 2 – 5

Donc 2 + (– 5) = 2 – 5.

Exemples : (– 5) – (+ 8) = – 5 – 8 = – 13   et   (– 9) – (– 4) = – 9 + 4 = – 5.

3 – Bilan.

Pour calculer une expression algébrique, il est plus facile :

- d'ajouter les nombres positifs entre eux ;
- d'ajouter les nombres négatifs entre eux ;
- de calculer la somme des deux termes restants.