Chapitre 9 : Angles et parallélisme.

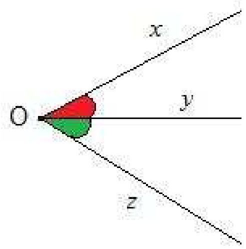
I – Angles adjacents.

Définition : Deux angles sont adjacents lorsque :

- ils ont le même sommet ;
- ils ont un côté commun ;
- ils sont situés de part et d'autre du côté commun.

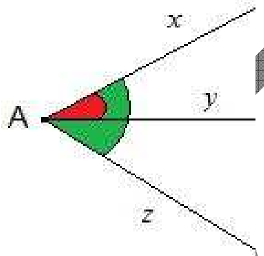
Exemples :

1)



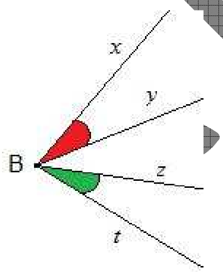
Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents.

2)



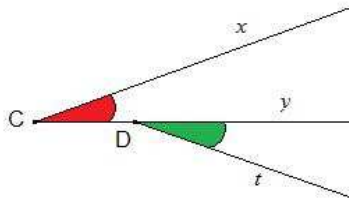
Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{xAz}$ ne sont pas adjacents : ils ne sont pas situés de part et d'autre du côté commun.

3)



Les angles $\widehat{xBy}$ et $\widehat{zBt}$ ne sont pas adjacents : ils n'ont pas de côté commun.

4)



Les angles $\widehat{xCy}$ et $\widehat{yDt}$ ne sont pas adjacents : ils n'ont pas le même sommet.

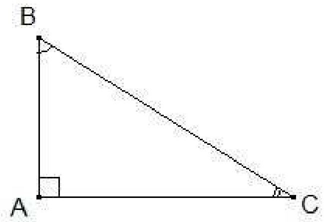
II – Angles complémentaires et angles supplémentaires.

1 – Angles complémentaires.

Définition : Deux angles sont complémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 90°

Exemple : Soient $\hat{A}$ = 51° et $\hat{B}$ = 39°.
$\hat{A} + \hat{B}$ = 51 + 39 = 90°, donc $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont complémentaires.

Propriété : Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
Justification :



On a vu au « Chapitre 3 : Triangles » que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Donc dans le triangle ABC rectangle en A, $\widehat{ABC}$ + $\widehat{ACB}$ *= 90°.*

2 – Angles supplémentaires.

Définition: Deux angles sont supplémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 180°

Exemple : Soient $\hat{C}$ = 44° et $\hat{D}$ = 136°.
$\hat{C}$ + $\hat{D}$ = 44 + 136 = 180°, donc $\hat{C}$ et $\hat{D}$ sont supplémentaires.

Remarque : Les trois angles d'un triangle sont supplémentaires.

III – Angles opposés par le sommet.

Définition : Deux angles sont opposés par le sommet lorsque :

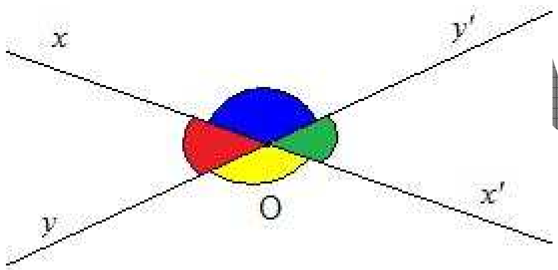
- ils ont le même sommet ;
- leurs côtés sont dans le prolongement d'un de l'autre.

Autrement dit, dire que deux angles sont opposés par le sommet signifie que ces deux angles sont symétriques par rapport à leur sommet.

Remarque : Deux droites sécantes forment deux paires d'angles opposés par le sommet.

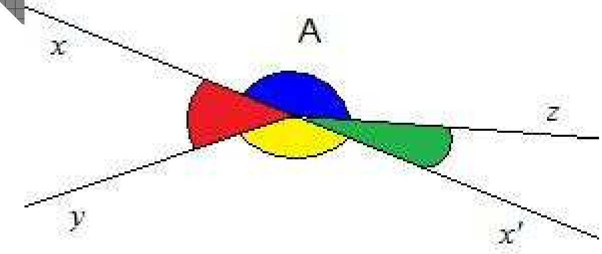
Exemples :

1)



Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$ sont opposés par le sommet. De même pour $\widehat{xOy'}$ et $\widehat{x'Oy}$.

2)



Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'Az}$ ne sont pas opposés par le sommet : les côtés [Ay) et [Az) ne sont pas symétriques par rapport à A.
De même pour $\widehat{xAz}$ et $\widehat{x'Ay}$.

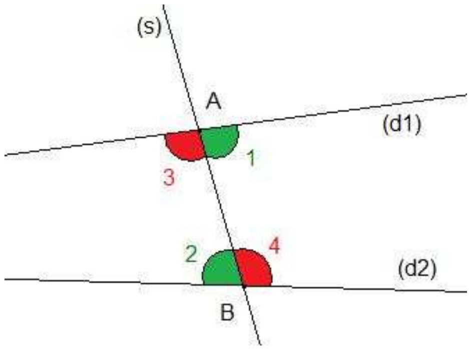
Propriété : Si deux angles sont opposés par le sommet, alors leurs mesures sont égales.

Exemple : Dans l'exemple **1)** précédent, les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$ sont opposés par le sommet, donc, leurs mesures sont égales. De même pour $\widehat{xOy'}$ et $\widehat{x'Oy}$.

IV – Angles alternes-internes et angles correspondants.

1 – Angles alternes-internes.

Définition : Soient deux droites (d1) et (d2) coupées par une sécante (s) en A et B.



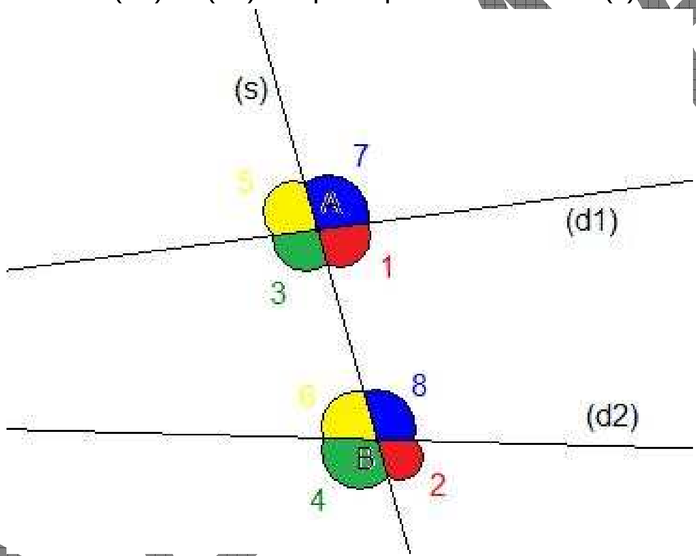
Dire que les angles **1** et **2** sont <u>alternes-internes</u> signifie que :

- ils sont de sommets A et B ;
- ils sont situés de part et d'autre de la sécante (s) [alternes] ;
- ils sont entre les deux droites (d1) et (d2) [internes].

<u>Remarque</u> : Les angles **3** et **4** sont aussi <u>alternes-internes</u>.

2 – Angles correspondants.

<u>Définition</u> : Soient deux droites (d1) et (d2) coupées par une sécante (s) en A et B.



Dire que les angles **1** et **2** sont <u>correspondants</u> signifie que :

- ils sont de sommets A et B ;
- ils sont situés d'un même côté de la sécante (s) ;
- l'un est entre les deux droites (d1) et (d2), et l'autre non.

<u>Remarque</u> : Les angles **3** et **4** ; **5** et **6** ; **7** et **8** sont aussi <u>correspondants</u>.

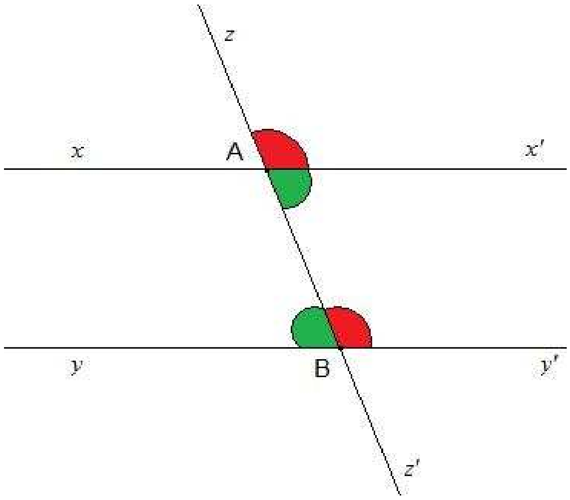
3 – Droites parallèles et angles égaux.

a) Propriétés.

<u>Propriété 1</u> : Si deus droites sont parallèles et sont coupées par une sécante, alors elles forment des angles alternes-internes égaux.

<u>Propriété 2</u> : Si deux droites sont parallèles et sont coupées par une sécante, alors elles forment des angles correspondants égaux.

<u>Exemples</u> :



1) Données : Les droites (*xx'*) et (*yy'*) sont parallèles ; et les angles $\widehat{x'Az'}$ et $\widehat{zBy}$ sont alternes-internes.

Conclusion : $\widehat{x'Az'} = \widehat{zBy}$.

2) Données : Les droites (*xx'*) et (*yy'*) sont parallèles ; et les angles $\widehat{x'Az}$ et $\widehat{y'Bz}$ sont correspondants.

Conclusion : $\widehat{x'Az} = \widehat{y'Bz}$.

Remarque : Ces deux propriétés servent à démontrer que des angles sont égaux.

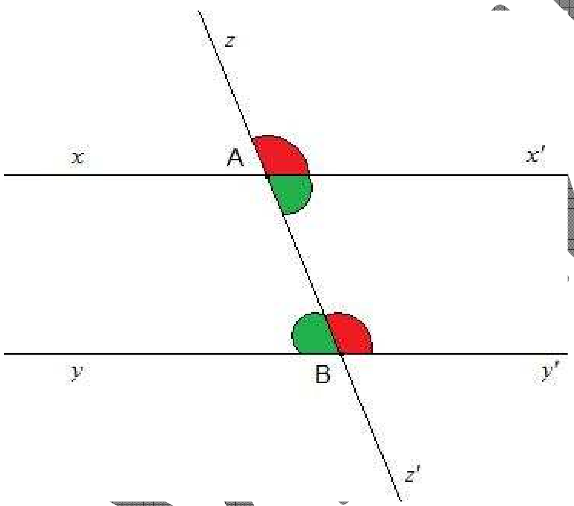
Conséquence de ces propriétés : Si deux droites sont parallèles et qu'une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.

b) Réciproques.

Réciproque de la propriété 1 : Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes égaux, alors ces droites sont parallèles.

Réciproque de la propriété 2 : Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants égaux, alors ces droites sont parallèles.

Exemples :



1) Données : Les angles $\widehat{x'Az'}$ et $\widehat{zBy}$ sont alternes-internes et $\widehat{x'Az'} = \widehat{zBy}$.

Conclusion : Les droites (*xx'*) et (*yy'*) sont parallèles.

2) Données : Les angles $\widehat{x'Az}$ et $\widehat{y'Bz}$ sont correspondants et $\widehat{x'Az} = \widehat{y'Bz}$.

Conclusion : Les droites (*xx'*) et (*yy'*) sont parallèles.

Remarque : Ces deux réciproques servent à démontrer que des droites sont parallèles.

Conséquence de ces réciproques : Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.