Chapitre 10 : Proportionnalité.

I – Situations de proportionnalité.

Définitions :

- On dit que deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs correspondantes de l'autre par un même nombre, appelé coefficient de proportionnalité.
- Un tableau représentant une situation de proportionnalité est appelé un tableau de proportionnalité.

Exemple : Un cinéma propose trois tarifs différents : A, B ou C.

Tarif A : 9 € par séance.

Tarif B : Un abonnement annuel de 20 € plus 5 € par séance.

Tarif C : Un abonnement annuel de 240 € donnant droit à un nombre illimité de séances (sans frais supplémentaire).

Compléter les tableaux suivants :

Tarif A :

Nombre de séances	1	2	5	10	15	20	30
Prix payé (en €)	9	18	45	90	135	180	270

Tarif B :

Nombre de séances	1	2	5	10	15	20	30
Prix payé (en €)	25	30	45	70	95	120	170

Tarif C :

Nombre de séances	1	2	5	10	15	20	30
Prix payé (en €)	240	240	240	240	240	240	240

Un seul de ces trois tarifs représente une situation de proportionnalité : le tarif A.

Pour le tarif A, on obtient en effet les nombres de la deuxième ligne en multipliant ceux de la première ligne par 9.
On dit que le prix payé avec le tarif A est proportionnel au nombre de séances de cinéma.
On dit aussi que le tableau correspondant au tarif A est un tableau de proportionnalité.
Son coefficient de proportionnalité est 9.

Remarque : $\frac{9}{1} = \frac{18}{2} = \frac{45}{5} = \frac{90}{10} = \frac{135}{15} = \frac{180}{20} = \frac{270}{30} = 9$.

Autres exemples :

- Au marché, le prix des légumes est proportionnel à la masse de légumes achetés.
- À la station service, le prix du plein de carburant est proportionnel à la quantité de carburant mise dans le réservoir.

II – Calculer dans une situation de proportionnalité.

1 – Passage à l'unité ou « règle de trois ».

Définition : En situation de proportionnalité, on dit que l'on effectue une « règle de trois » lorsque, pour conclure, on fait d'abord le calcul pour une seule unité.
Autrement dit, on calcul le coefficient de proportionnalité.

Exemple : Sur l'étiquette d'une bouteille de sirop de grenadine, on peut lire :

« Avec 75 cL de sirop, on peut obtenir 6 L d'une délicieuse boisson rafraîchissante. »

On veut fabriquer 9 L de boisson. Quelle est la quantité de sirop nécessaire ?

- Pour fabriquer 6 L de boisson, on a besoin de 75 cL de sirop, donc pour fabriquer 1 L de boisson, on a besoin de 6 fois moins de sirop, soit 12,5 cL (en effet, $\frac{75}{6} = 12{,}5$).

[C'est le passage à l'unité.]

- Pour fabriquer 9 L de boisson, on a besoin de 9 fois plus de sirop, soit 112,5 cL (en effet, $9 \times 12{,}5 = 112{,}5$).

[On effectue une « règle de trois » ; cela exprime le fait qu'interviennent trois nombres.]

- *Conclusion* : Pour 9 L de boisson, il faut 112,5 cL de sirop.

2 – En utilisant le coefficient de proportionnalité.

Remarque : Dans un tableau de proportionnalité :

- un nombre de la seconde ligne s'obtient en multipliant le nombre correspondant de la première ligne par le coefficient de proportionnalité ;
- un nombre de la première ligne s'obtient en divisant le nombre correspondant de la seconde ligne par le coefficient de proportionnalité.

Exemple : Un boulanger vend 3 pains au chocolat au prix de 2,7 €.

À quel prix vendra-t-il 5 pains au chocolat ?

Combien peut-on acheter de pains au chocolat avec 7,2 € ?

$\div \frac{2,7}{3} = 0,9$

Nombre de pains au chocolat	3	5	**B**
Prix (en €)	2,7	**A**	7,2

$\times \frac{2,7}{3} = 0,9$

A = 5 × 0,9 = 4,5. Le boulanger vendra donc 5 pains au chocolat au prix de 4,5 €.

B = 7,2 ÷ 0,9 = 8. Avec 7,2 €, on peut donc acheter 8 pains au chocolat.

3 – En multipliant ou en divisant une « colonne » par un nombre (non nul).

Propriété : Dans un tableau de proportionnalité, on peut construire une nouvelle colonne :

- en multipliant les valeurs d'une colonne par un même nombre ;
- en divisant les valeurs d'une colonne par un même nombre (non nul).

Exemple : 3 kg de fraises coûtent 12,9 €. Combien coûtent 5 kg de fraises ?

$\times \frac{5}{3}$

Masse de fraises (en kg)	3	5
Prix (en €)	12,9	**C**

C = $12{,}9 \times \frac{5}{3} = \frac{12{,}9 \times 5}{3} = \frac{64{,}5}{3} = 21{,}5$. 5 kg de fraises coûtent donc 21,5 €.

4 – En additionnant ou en soustrayant deux « colonnes » du tableau.

Propriété : Dans un tableau de proportionnalité, on peut construire une nouvelle colonne en ajoutant les valeurs de deux colonnes ensemble.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, combien coûtent 8 kg de fraises ?

+

Masse de fraises (en kg)	3	5	8
Prix (en €)	12,9	21,5	**D**

D = 12,9 + 21, 5 = 34,4. 8 kg de fraises coûtent donc 34,4 €.

III – Appliquer un taux de pourcentage.

1 – Étude d'un exemple.

Dire qu'il y a 72 % (on lit : « 72 pour cent ») de cacao dans une tablette de chocolat signifie que :

- la quantité de cacao est proportionnelle à la quantité de chocolat ;
- dans 100 g de chocolat, il y a 72 g de cacao.

$\div \frac{2,7}{100}$ = 0,72

Quantité de chocolat (en g)	100
Quantité de cacao (en g)	72

$\times \frac{72}{100}$ = 0,72

Remarque :
Pour calculer la quantité de cacao contenue dans une tablette de 250 g, on calcule 72 % de 250.

2 – Appliquer un pourcentage.

Propriété : Soit p un nombre donné.

Pour calculer p % d'un nombre, on multiplie ce nombre par $\frac{p}{100}$.

Exemple 1 : On reprend l'exemple précédent et on souhaite calculer la quantité de cacao contenue dans une tablette de 250 g. On effectue le calcul suivant :

250 × $\frac{72}{100}$ = 250 × 0,72 = 180. Il y a donc 180 g de cacao dans une tablette de 250 g de chocolat.

Remarque : On peut écrire 72 % = $\frac{72}{100}$ = 0,72.

Exemple 2 : Dans la classe de 6ème 7, on sait qu'il y a 25 élèves et qu'il y a 44 % de filles.
Combien y a-t-il de filles en 6ème 7 ?

25 × $\frac{44}{100}$ = 25 × 0,44 = 11. Il y a donc 11 filles en 6ème 7.

3 – Des pourcentages bien connus.

- 50 % d'une quantité correspondent à sa moitié.

Exemple : 50 % de 28 € représentent 14 €.

- 25 % d'une quantité correspondent à son quart.

Exemple : 25 % de 64 L représentent 16 L.

- 10% d'une quantité correspondent à son dixième.

Exemple : 10 % de 71 kg représentent 7,1 kg.