Chapitre 5 : Division euclidienne et division décimale.

I – Division euclidienne.

1 – Définition et vocabulaire.

Définition : Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b différent de 0, c'est déterminer les nombres entiers q et r tels que : $a = (b \times q) + r$, avec $r < b$.

Vocabulaire : a est le dividende (le nombre qui est divisé), b est le diviseur (le nombre qui divise), q est le quotient et r est le reste de la division euclidienne de a par b.

a (Dividende)	b (Diviseur)
	q (Quotient entier)
r (Reste)	

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 52 par 8.

52	8
– 48	6
4	

52 est le dividende, 8 est le diviseur, 6 est le quotient, et 4 est le reste de la division euclidienne de 52 par 8.
Donc 52 = (8 × 6) + 4.

Remarque : On ne peut pas diviser par 0 (ça n'a pas de sens !).

2 – Effectuer une division euclidienne.

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 3 343 par 42.

a) En posant l'opération.

3343	42
– 294	79
403 – 378	
25	

- Dans 334, combien de fois 42 ?
  (Astuce : dans 33, combien de fois 4 ? 8 fois. Donc la réponse est 8 ou 7).
  On effectue 7 × 42 (= 294).
  Puis on pose la soustraction 334 – 294. Il reste 40.
- On abaisse le 3. Dans 403, combien de fois 42 ?
  On effectue 9 × 42 (= 378).
  Puis on pose la soustraction 403 – 378. Il reste 25.
- Quotient = 79 et Reste = 25.
  On a : 3 343 = (79 × 42) + 25.

b) Avec la calculatrice.

1ère Méthode :

On effectue la division décimale de 3 343 par 42 en utilisant la touche $\boxed{\div}$ de la calculatrice.
On obtient : 79,5952381. Donc le quotient de la division euclidienne vaut 79 (partie entière).
Donc 3 343 = (79 × 42) + reste. Donc reste = 3 343 – (79 × 42) = 25.
Donc le reste de la division euclidienne vaut 25.

<u>2ème Méthode</u> :

Certaines calculatrices ont une touche qui permet d'effectuer la division euclidienne.
Casio : $\boxed{\div R}$; TI : $\boxed{\text{⊢}}$ (au dessus de la touche $\boxed{\div}$).
On tape donc sur les touches suivantes :
Casio : 3 343 $\boxed{\div R}$ 42 $\boxed{\text{EXE}}$; TI : 3 343 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\div}$ 42 $\boxed{\text{enter}}$. Donc q = 79 et r = 25.

II – Divisibilité.

1 – Multiples et diviseurs.

Vocabulaire :
Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul (vaut 0), alors $a = b \times q$ et on dit que :

- a est un multiple de b.
- a est divisible par b.
- b est un diviseur de a.

Exemple : 12 est un multiple de 4 (car 12 = 4 × 3) ; 4 est un diviseur de 12.

Remarques :

- « est un multiple de » signifie « est dans la table de ».
  Exemple : 12 est un multiple de 4 signifie 12 est dans la table de 4.
- Le mot « diviseur » a deux sens : diviseur d'une division et diviseur d'un nombre entier.
  Exemple :
  - 8 est le diviseur de la division de 52 par 8, c'est-à-dire le nombre par lequel on divise 52.
  - le reste de cette division euclidienne n'est pas zéro, donc 8 n'est pas un diviseur du nombre 52.

2 – Critères de divisibilité.

- Un nombre entier est divisible par 2 lorsque son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
  Remarques :
  - Les nombres entiers divisibles par 2 sont appelés nombres pairs.
  - Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 2 sont appelés nombres impairs.
- Un nombre entier est divisible par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre entier est divisible par 10 lorsque son chiffre des unités est 0.
- Un nombre entier est divisible par 4 lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (ou bien lorsqu'il est divisible par 2 et encore par 2).
- Un nombre entier est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples : On considère le nombre entier 4 236.

- 4 236 est divisible par 2 car son chiffre des unités est 6 ; mais n'est pas divisible par 5 ou 10 car son chiffre des unités n'est ni 0, ni 5.
- 4 236 est divisible par 4 car 36 est divisible par 4 ; en effet 36 = 9 × 4.
- 4 + 2 + 3 + 6 = 15 et 15 est divisible par 3, mais pas par 9.
  4 236 est donc divisible par 3, mais pas par 9.

3 – Lien entre la multiplication et la division.

À une multiplication correspond deux divisions.

Exemple : 3 × 4 = 12. Donc 12 ÷ 4 = 3 et 12 ÷ 3 = 4.

On dit que 12 est un multiple de 3 et de 4.
On dit que 3 et 4 sont des diviseurs de 12.

4 – Pour voir plus loin…

a) PPCM.

Un multiple commun à 6 et 9 est un multiple à la fois de 6 et de 9.

Exemple : 6 × 9 = 54 est un multiple commun à 6 et 9.

Le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) de 6 et 9 est le plus petit des multiples communs à 6 et 9.

Exemple : 6 × 1 = 6 ; 6 × 2 = 12 ; 6 × 3 = 18 = 9 × 2. Donc PPCM(6 ; 9) = 18.

b) PGCD.

Un diviseur commun à 8 et 12 est un diviseur à la fois de 8 et de 12.

Exemple : 2 est un diviseur commun à 8 et 12 car 8 = 2 × 4 et 12 = 2 × 6.

Le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 8 et 12 est le plus grand des diviseurs communs à 8 et 12.

Exemple :
Diviseurs de 8 : 1 ; 2 ; 4 ; 8. Diviseurs de 12 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12. Donc PGCD(8 ; 12) = 4.

III – Division décimale.

1 – Définition.

Soit a un nombre décimal et b un nombre entier non nul.
On appelle quotient de a par b le nombre qui, multiplié par b, donne a.
Le quotient de a par b se note $a \div b$. On a donc $(a \div b) \times b = a$.

Exemples :

- 7 × 3 = 21, donc 21 ÷ 3 = 7.
- (24 ÷ 8) × 8 = 24.

La division décimale de a par b permet de calculer :

- soit la valeur exacte du quotient de a par b ;
- soit des valeurs approchées de ce quotient.

2 – Effectuer une division décimale.

Pour effectuer une division décimale, on effectue la division comme une division euclidienne mais dès que l'on atteint la partie décimale du dividende (le chiffre des dixièmes du dividende), on place la virgule au quotient.

a) 1er cas : la division tombe juste.

Effectuer la division euclidienne de 38,7 par 6 :

38,70	6
– 36	6,45
27 – 24	
30 – 30	
0	

- 6,45 est la valeur exacte du quotient de 38,7 par 6.
- 38,7 ÷ 6 = 6,45.

b) $2^{\text{ème}}$ cas : la division ne tombe pas juste.

Effectuer la division décimale de 25 par 3, et donner une troncature du quotient au centième :

25,00	3
– 24	8,33
10 – 9	
10 – 9	
1	

- 8,33 est une valeur approchée par défaut du quotient de 25 par 3 à 0,01 près.
- 25 ÷ 3 ≈ 8,33.

Remarques :

- Lorsqu'on divise par un nombre supérieur à 1, on réduit.
- Lorsqu'on divise par un nombre inférieur à 1, on agrandit.

3 – Division par 10 ; par 100 ; par 1 000.

Pour diviser par :	**On décale la virgule de :**	**Exemples**
10	1 rang vers la gauche	16,5 ÷ 10 = 1,65
100	2 rangs vers la gauche	16,5 ÷ 100 = 0,165
1 000	3 rangs vers la gauche	16,5 ÷ 1 000 = 0,0165

Remarque : Diviser par 10 ; par 100 ; par 1 000 revient à multiplier par 0,1 ; par 0,01 ; par 0,001.