Chapitre 7 : Écritures fractionnaires.

I – Généralités.

1 – Définitions.

Rappels :

- Le quotient d'un nombre a par un nombre non nul b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.
- La division décimale de a par b permet de calculer :
  - la valeur exacte du quotient de a par b, si le reste est nul ;
  - une valeur approchée de ce quotient, si le reste n'est pas nul.

Définition : L'écriture fractionnaire du quotient de a par b est $\frac{a}{b}$. Elle se lit « a sur b ».

On a : $a \div b = \frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b} \times b = a$.

Exemple : $\frac{16}{8} = 16 \div 8 = 2$ car $2 \times 8 = 16$. On a bien : $\frac{16}{8} \times 8 = 16$.

Remarque : Un quotient admet toujours une écriture fractionnaire. En revanche, un quotient n'admet pas toujours une écriture décimale.

Exemple 1 :
$\frac{7}{4}$ est l'écriture fractionnaire du quotient de 7 par 4.
$7 \div 4 = \frac{7}{4}$ or $7 \div 4 = 1{,}75$;
$\frac{7}{4}$ et 1,75 sont deux écritures de la valeur exacte de $7 \div 4$.

Exemple 2 :
$\frac{7}{3}$ est l'écriture fractionnaire du quotient de 7 par 3.
$7 \div 3 = \frac{7}{3}$ or $7 \div 3 \approx 2{,}33$ (valeur approchée par défaut au centième) ;
$\frac{7}{4}$ est la seule écriture de la valeur exacte de $7 \div 3$ et 2,33 est une valeur approchée de $7 \div 3$.

2 – Vocabulaire.

Vocabulaire :

- Dans l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$, a est appelé le numérateur et b le dénominateur (jamais égal à zéro).
- Lorsque a et b sont des nombres entiers, on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction.

Exemples :

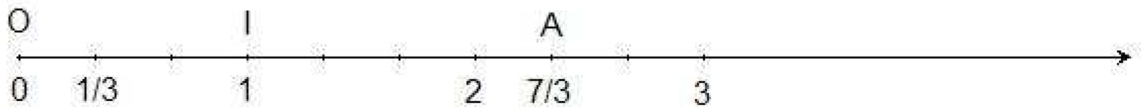
- Dans l'écriture fractionnaire $\frac{4{,}2}{5}$, le numérateur est 4,2 et le dénominateur est 5.
- $\frac{3}{5}$ est une fraction, car 3 et 5 sont des nombres entiers.
- $\frac{2{,}5}{4}$ n'est pas une fraction, car son numérateur n'est pas un nombre entier.

3 – Repérage sur une demi-droite graduée.

Méthode pour placer le point A d'abscisse $\frac{7}{3}$ sur une demi-droite graduée :

1) On partage le segment unité [OI] en 3 parties égales ;
2) On reporte une partie 7 fois à partir de O ;
3) On place $\frac{7}{3}$.

Remarque : Pour pouvoir facilement partager le segment unité [OI] en 3 parties égales, il suffit de prendre OI = 3 cm ou OI = 3 carreaux (ou bien un multiple de 3).



On peut écrire $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 3 - \frac{2}{3}$.

Exercice : Placer le point B d'abscisse $\frac{5}{4}$ sur une demi-droite graduée.

II – Égalité de quotients.

1 – Propriété des quotients.

Propriété : La valeur d'une écriture fractionnaire ne change pas lorsque l'on multiplie ou l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Lorsque a, b et k désignent des nombres décimaux, avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$.

2 – Utilisation de la propriété des quotients.

- **Cette propriété permet de reconnaître des quotients égaux.**

Exemple : $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{10}$ sont-ils égaux ? $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$ donc $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{10}$ sont égaux.

- **Cette propriété permet de simplifier une fraction.**

Définition : Simplifier une fraction signifie écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Exemple : Simplifier la fraction $\frac{6}{15}$.

$\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$ ou $\frac{6}{15} = \frac{3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2}{5}$.

Remarque : $2 = \frac{2}{1}$; $5 = \frac{5}{1}$; $3{,}7 = \frac{3{,}7}{1}$.

Pour simplifier une fraction, on cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur et si on peut on cherche le plus grand diviseur commun (PGCD).

- **Cette propriété permet de transformer une écriture fractionnaire en fraction.**

Exemples : $\frac{2{,}3}{3} = \frac{2{,}3 \times 10}{3 \times 10} = \frac{23}{30}$ et $\frac{28}{0{,}7} = \frac{28 \times 10}{0{,}7 \times 10} = \frac{280}{7}$.

Remarque : Cela nous permet de diviser un nombre décimal par un autre nombre décimal (dans l'exemple, diviser 28 par 0,7 revient à diviser 280 par 7 et on trouve 40).

III – Multiplier un nombre par une fraction.

Propriété : Pour multiplier la fraction $\frac{a}{b}$ par le nombre c, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- diviser a par b puis multiplier par c, autrement dit : $\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$.
- multiplier a par c puis diviser par b, autrement dit : $\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$.

- diviser c par b puis multiplier par a, autrement dit : $\frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$.

<u>Exemples</u> :

❖ $\frac{15}{5} \times 7 = 3 \times 7 = 21$

❖ $\frac{15}{5} \times 7 = \frac{15 \times 7}{5} = \frac{105}{5} = 21$

❖ $\frac{15}{5} \times 7 = \frac{7}{5} \times 15 = 1{,}4 \times 15 = 21$

<u>Remarque</u> : On ne commence par la division (1$^{\text{ère}}$ et 3$^{\text{ème}}$ méthodes) que lorsque la division « tombe juste ».

<u>Propriété</u> : Pour prendre une fraction d'une grandeur (ou d'une quantité), on multiplie cette fraction par cette grandeur (ou cette quantité).

<u>Exemple</u> :

Une boîte de 72 chocolats est remplie aux $\frac{3}{4}$. Combien de chocolats contient cette boîte ?

- On calcule $\frac{3}{4} \times 72$.
- En utilisant une des trois méthodes précédentes, on trouve : $\frac{3}{4} \times 72 = 54$.
- La boîte de chocolats contient 54 chocolats.