Chapitre 9 : Grandeurs, périmètres et aires.

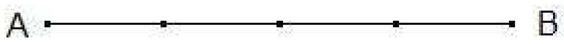
I – Grandeurs et mesures.

1 – Définition.

Ce qui peut être mesuré, estimé, s'appelle une grandeur.
Mesurer une grandeur signifie l'évaluer à l'aide d'une unité de mesure.

Exemple :

 est l'unité de mesure.



Le segment [AB] mesure 4 unités.

Remarque : Quand on effectue une mesure, on n'obtient pas une valeur exacte mais une valeur approchée.

2 – Mesures de longueurs.

Définition : La mesure d'un segment s'appelle sa longueur.
L'unité légale de longueur est le mètre (m).

Autres unités de longueur :

Multiples de l'unité			Unité	Sous-multiples de l'unité		
kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
1 km = 1 000 m	1 hm = 100 m	1 dam = 10 m	1 m	1 dm = 0,1 m	1 cm = 0,01 m	1 mm = 0,001 m

Exemple : Un double décimètre a pour longueur 2 dm, c'est-à-dire 0,2 m ou 20 cm.

Remarque : On choisit l'unité en fonction de la taille de l'objet à mesurer.
Pour exprimer la distance de Paris à Lyon, on préfère 458 km à 458 000 000 mm !

3 – Mesures de masses.

Définition : La mesure d'une quantité de matière s'appelle sa masse.
L'unité légale de masse est le kilogramme (kg).
On utilise aussi le gramme (g). On a : 1 kg = 1 000 g.

Autres unités de masse :

Multiples de l'unité			Unité	Sous-multiples de l'unité		
kilogramme	hectogramme	décagramme	gramme	décigramme	centigramme	milligramme
1 kg = 1 000 g	1 hg = 100 g	1 dag = 10 g	1 g	1 dg = 0,1 g	1 cg = 0,01 g	1 mg = 0,001 g

Exemple : Une baguette de pain a une masse de 250 g, c'est-à-dire 0,250 kg.

Remarques :

- Les multiples du kilogramme sont le quintal (q) et la tonne (t).
  On a : 1 q = 100 kg et 1 t = 1 000 kg.
- La dizaine de kilogramme n'a pas de nom particulier.

4 – Calculer avec des grandeurs.

On ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même nature :
des longueurs avec des longueurs, des masses avec des masses, etc ….

Exemples :
- On ne peut pas additionner 15 m et 5 kg !
- On peut additionner 5 m et 2 m : 5 m + 2 m = 7 m.

Remarque : Pour calculer avec des grandeurs, il est plus simple de les exprimer avec la même unité.

Exemples :
- 2 cm + 5 mm = 20 mm + 5 mm = 25 mm.
- 10 m – 40 cm = 10 m – 0,4 m = 9,6 m.

II – Périmètres.

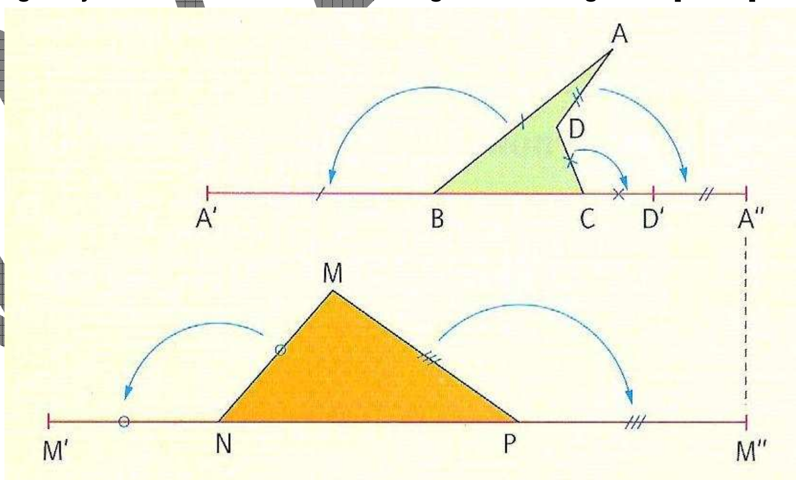
1 – Périmètre et comparaison.

Définition : Le périmètre d'une figure est la longueur du contour de cette figure.

Méthode pour comparer géométriquement des périmètres :

a) Pour chacune des figures, on reporte son périmètre au compas sur une demi-droite.
b) On compare ensuite les périmètres à l'aide des demi-droites.

Exemple :
Le périmètre de la figure verte ci-dessous est la longueur du segment [A'A''].
Le périmètre de la figure jaune ci-dessous est la longueur du segment [M'M''].



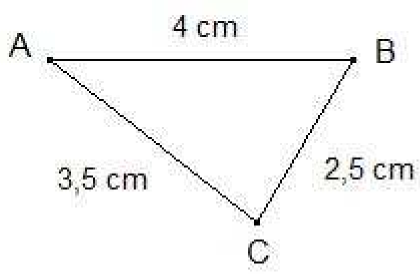
M'M'' > A'A'' donc le périmètre de la figure jaune est plus grand que le périmètre de la figure verte.

2 – Périmètre d'un polygone.

a) Propriété.

Propriété : Le périmètre d'un polygone est égal à la somme des longueurs de ses côtés.

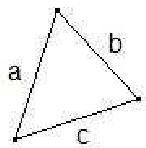
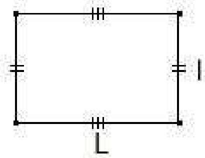
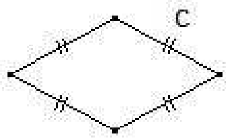
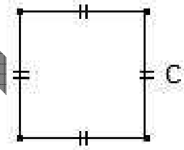
Exemple :



AB + BC + AC = 4 cm + 2,5 cm + 3,5 cm = 10 cm.

Le périmètre du triangle ABC est de 10 cm.

b) Formulaire.

	Triangle	Rectangle	Losange	Carré
Figure				
Périmètre	P = a + b + c	P = L + l + L + l P = L × 2 + l × 2 P = (L + l) × 2	P = c + c + c + c P = c × 4	

Exemple : Calculer le périmètre d'un rectangle de longueur 4,5 cm et de largeur 2,5 cm.

P = (L + l) × 2 = (4,5 cm + 2,5 cm) × 2 = 7 cm × 2 = 14 cm.

Le périmètre de ce rectangle est donc de 14 cm.

3 – Longueur d'un cercle.

a) Le nombre π.

Utilisation :

- π est la lettre de l'alphabet grec qui correspond au p de notre alphabet.
- π se prononce « pi ».
- En mathématiques, la lettre π désigne un nombre particulier qui permet de calculer la longueur d'un cercle.

Nombre :

- π est le nombre 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 …
- La partie décimale de π comporte une infinité de chiffres.
- π n'est donc pas un nombre décimal.

Valeurs :

- Une valeur approchée par défaut au centième de π est 3,14 ; c'est-à-dire $\pi \approx 3{,}14$.
- La touche $\boxed{\pi}$ de la calculatrice donne une valeur approchée par excès au milliardième :

  $\pi \approx 3{,}141\,592\,654$.

Calculer :

- Dans les exercices, « calculer » la longueur d'un cercle signifie « donner la valeur exacte » ; le résultat dépend du nombre π : on verra le nombre π dans la réponse.
- Pour répondre à la consigne « donner un arrondi » de la longueur d'un cercle, on calcule la valeur exacte, puis on utilise le plus souvent 3,14 ou la touche $\boxed{\pi}$ de la calculatrice.

Toujours plus de précision sur π : un peu d'histoire.

L'idée qu'on peut calculer le périmètre d'un cercle dont on connaît le diamètre est très ancienne. Il est probable que nos ancêtres ne voyaient pas dans ce calcul la multiplication du diamètre par un « rapport », ni à plus forte raison par un nombre, mais des documents nous restent, comme par exemple :

- une tablette babylonienne, découverte en 1936, qui propose ce qu'on interprète comme une multiplication par $\frac{25}{8}$ (soit 3,125) ;
- le papyrus de Rhind, découvert en 1855, qui propose $\frac{256}{81}$ (dont l'arrondi au millième est 3,16) ;
- la Bible (1 Rois, Chap. 7, 23) : « *Il fit la mer de fonte. Elle avait dix coudées d'un bord à l'autre, une forme entièrement ronde, cinq coudées de hauteur, et une circonférence que mesurait un cordon de trente coudées.* »

Nous attribuons aujourd'hui à Archimède (v. 287–212 av. J.-C.) l'établissement d'un rapport de proportionnalité entre le périmètre d'un cercle et son diamètre.
Dans son ouvrage **χύχλου μετρησις** (« sur la mesure du cercle), il désigne la longueur de la circonférence par la mot **περίμετρος** (« périmètre »).
Leonhard Euler (1707-1783) a achevé d'imposer l'usage de la première lettre de ce mot pour désigner le nombre par lequel il faut multiplier le diamètre d'un cercle pour obtenir son périmètre.

La recherche de décimales de π, toujours plus nombreuses (des milliards), est de nos jours un exercice servant à éprouver les méthodes de calcul et les ordinateurs.

b) Formulaire.

Propriété : La longueur **P** d'un cercle de diamètre **d** est : **P** = π × **d**.
Or, le diamètre **d** est le double du rayon **r**, donc la longueur **P** d'un cercle de rayon **r** est :
P = 2 × π × **r**.

Exemple : Calculer la longueur **P** d'un cercle de rayon 2,5 cm, puis donner l'arrondi au dixième de cette longueur.
On a : **P** = 2 × π × 2,5 = 5 × π cm. C'est la valeur exacte de la longueur du cercle.
Pour trouver l'arrondi de P au dixième, on dispose de deux méthodes :

Méthode 1

On prend $\pi \approx 3{,}14$.
On a : **P** ≈ 5 × 3,14.
Donc : **P** ≈ 15,7 cm.

Méthode 2

On utilise la touche $\boxed{\pi}$ de la calculatrice.
On tape sur les touches : $\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{\pi}\ \boxed{=}$ et on obtient :
15,707 963 27. Donc l'arrondi de **P** au dixième est 15,7 cm.

III – Aires.

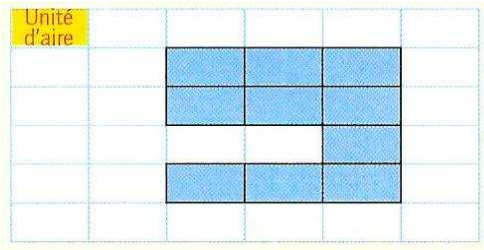
1 – Notion d'aire.

a) Mesure d'une surface.

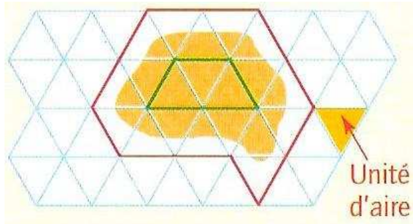
Définitions :

- La surface d'une figure plane est la partie située à l'intérieur de la figure.
- L'aire d'une figure est la mesure de sa surface.

Exemples :



En prenant pour unité l'aire du rectangle jaune, l'aire de la surface bleue est 10 unités d'aire.



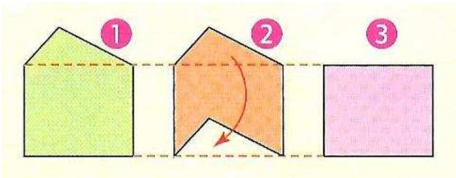
En prenant pour unité l'aire du triangle jaune, l'aire de la surface orange est comprise entre 3 et 20 unités.

Remarque : Le mot superficie est souvent employé pour désigner l'aire d'un terrain, d'un pays ….

b) Comparaison d'aires.

Propriété : Des figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.

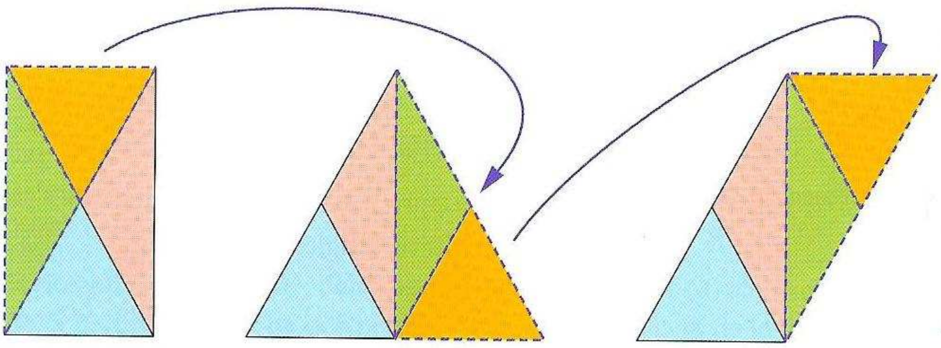
Exemple 1 :



L'aire de la surface **1** est plus grande que l'aire de la surface **2**.

Les surfaces **2** et **3** ont la même aire.

Exemple 2 : Les trois figures ci-dessous sont différentes, mais ont la même aire.



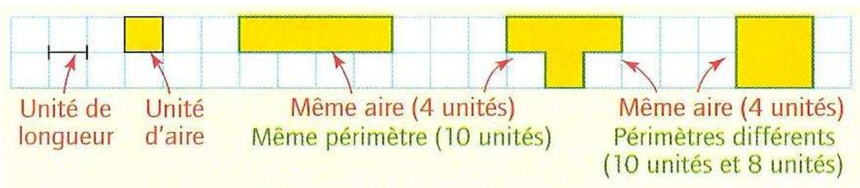
Remarque : On peut comparer les aires de différentes figures en les découpant !

c) Ne pas confondre périmètre et aire !

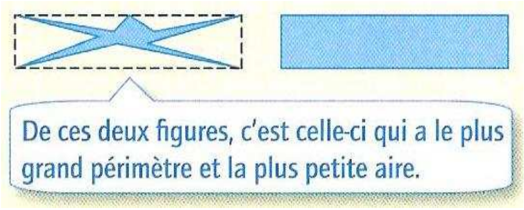
⚠ ATTENTION : L'aire d'une figure est la mesure de sa surface et le périmètre d'une figure est la longueur de son contour.

Propriété : Le périmètre et l'aire d'une figure n'augmentent pas toujours de la même façon : deux figures peuvent avoir par exemple la même aire, mais des périmètres différents.

Exemple 1 :



Exemple 2 :
De deux figures, celle qui a le plus grand périmètre n'a pas obligatoirement la plus grande aire.



2 – Unités d'aire.

a) Unité légale.

Définition : L'unité d'aire (légale) est le mètre carré ; on le note m².
1 m² correspond à l'aire d'un carré de 1 mètre de côté.

Remarque : On utilise aussi :

- des multiples du mètre carré : dam² ; hm² ; km².
- des sous-multiples du mètre carré : dm² ; cm² ; mm².

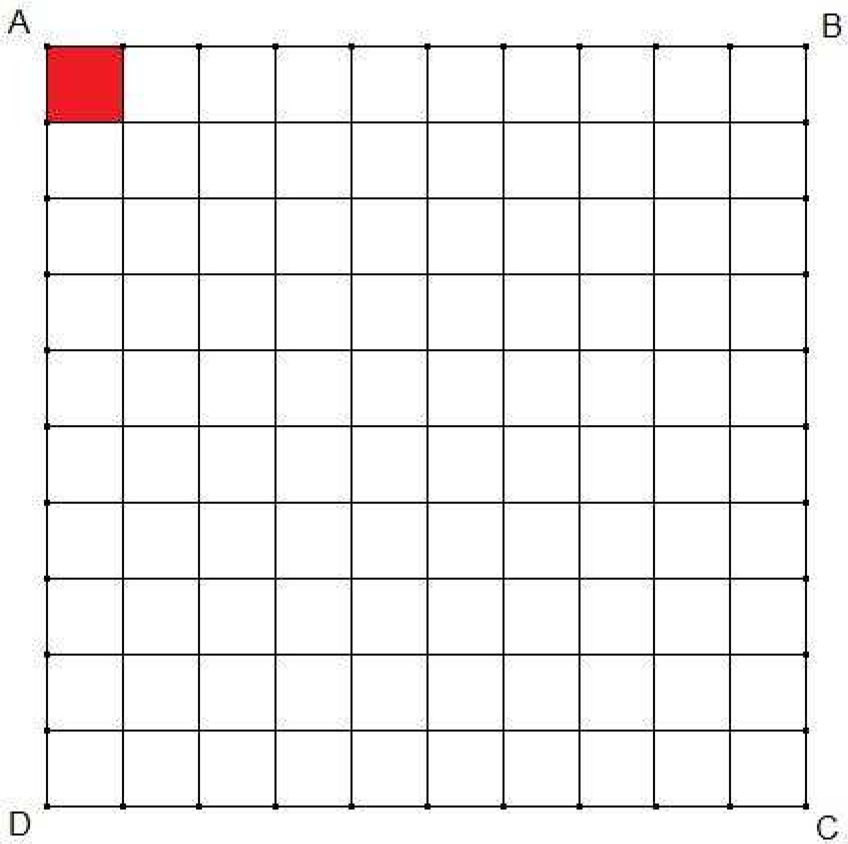
b) Changement d'unité.

Exemple pour comprendre la correspondance entre les unités :

On considère un carré ABCD de 1 dm de côté. Par définition : Aire(ABCD) = 1 dm².

On partage les segments [AB] et [AD] en 10 segments de 1 cm de longueur.

On fabrique ainsi 100 petits carrés de 1 cm de côté. Ces petits carrés ont pour aire 1 cm².



On a donc : 1 dm² = 100 cm².
De même, on a : 1 m² = 100 dm² ; etc ….

c) Tableau de conversions.

Dans le tableau ci-dessous, d'après ce qui précède, il y a deux rangs par unité d'aire.

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
							1,	2	0	3	0		

Exemple : Convertir 1,203 m² en cm².
On place le nombre dans le tableau : le chiffre des unités, ici 1, est placé dans la colonne droite correspondant au m².
On lit le résultat : 1,203 m² = 12 030 cm².

d) Autres unités d'aire.

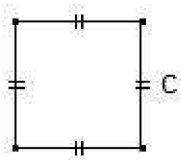
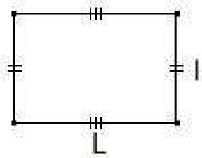
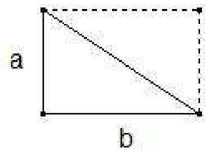
Remarque : Pour mesurer des superficies, on peut utiliser comme unités d'aires l'are (a) et son multiple l'hectare (ha).

On a : 1 ha = 100 a ; 1 a = 100 m² et 1 ha = 10 000 m².

Exemples : 1,36 ha = 136 a ; 2,15 ha = 21 500 m² et 7 420 m² = 0,742 ha.

3 – Formulaire.

a) Aires de polygones particuliers.

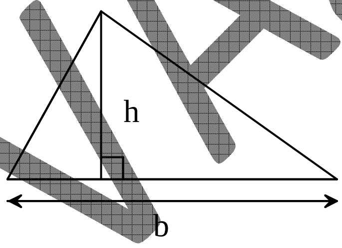
	Carré	Rectangle	Triangle rectangle
Figure			
Aire	A = c × c	A = L × l	A = $\frac{a \times b}{2}$

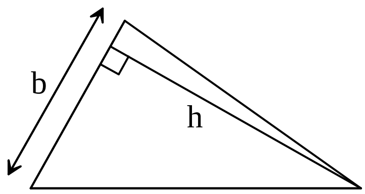
Exemple : Calculer l'aire d'un rectangle de longueur 4,5 cm et de largeur 2,5 cm.

A = L × l = 4,5 cm × 2,5 cm = 11,25 cm².

L'aire de ce rectangle est donc de 11,25 cm².

b) Aire d'un triangle quelconque.



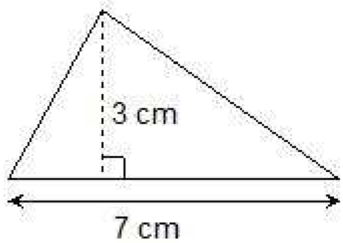


Propriété : L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de la longueur d'un de ses côtés par la hauteur relative à ce côté : $\mathbf{A_T = (b \times h) \div 2 = \frac{b \times h}{2}}$.

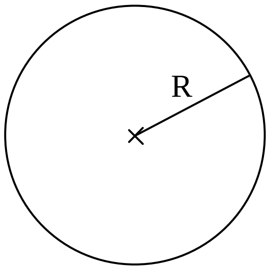
Exemple :

Calculer l'aire du triangle ci-contre.

$A_T = \frac{7 \times 3}{2} = \frac{21}{2}$ = 10,5 cm².



c) Aire d'un disque.



Propriété : L'aire d'un disque de rayon $\mathbf{R}$ s'obtient en multipliant le nombre $\boldsymbol{\pi}$ par la produit du rayon R par lui-même : $\mathbf{A_D} = \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Remarque : Le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est appelé le « carré du rayon $\mathbf{R}$ ».
On le note de façon condensée $\mathbf{R}^2$ (on lit « $\mathbf{R}$ au carré » ou « $\mathbf{R}$ deux »).

Aire l'aire d'un disque de rayon $\mathbf{R}$ est donnée par : $\mathbf{A_D} = \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{R}^2$.

Exemple :
Calculer la valeur exacte, puis l'arrondi au dixième de l'aire d'un disque de rayon 5 cm.

$\mathbf{A_D} = \boldsymbol{\pi} \times 5 \times 5 = 25\,\boldsymbol{\pi}$ cm². La valeur exacte de son aire est $25\,\boldsymbol{\pi}$ cm².

Avec la calculatrice, on tape : $25 \times \boldsymbol{\pi}$. On obtient : 78,539 816 34.

L'arrondi au dixième de son aire est 78,5 cm².